

COLLOQUE MAI 2006
THEORIE DES ENSEMBLES :
HISTOIRE, ENJEUX ET PERSPECTIVES

Résumés des interventions

Patrick DEHORNOY, Caen

Progrès récents sur l'hypothèse du continu, d'après Woodin

Les travaux récents de Woodin ont considérablement renouvelé la théorie des ensembles en lui apportant une intelligibilité globale et en restaurant son unité. Pour la première fois, ses résultats ouvrent une perspective réaliste de résoudre le problème du continu, et, à tout le moins, ils établissent le caractère irréfutablement signifiant et précis de celui-ci.

Jacques DUBUCS, Paris

Données ensemblistes

Deux leçons antagonistes ont été tirées des résultats d'indépendance obtenus en théorie des ensembles. Selon Gödel, ces résultats montrent que l'activité mathématique de preuve inclut la recherche de nouveaux axiomes; selon Feferman, ils montrent que la notion même d'ensemble est intrinsèquement vague. Je discuterai cette controverse à la lumière des progrès récents relatifs à l'hypothèse du continu.

Jacques DUPARC, Lausanne

Determinacy

In Set Theory, games are more and more both used as a powerful tool, and studied as an alternative version of the axiom of choice. The first game we consider is the two-player game of perfect information of length ω , in which the players take turn playing natural numbers. The first player winning the game iff the real they have produced belongs to a given

pay off set. Determinacy is the statement that one of the two players has a strategy that allows a win whatever the opponent does. For Borel payoff sets, determinacy was proven within ZFC by Tony Martin in 1975. Whereas applied to all payoff sets, it contradicts the full Axiom of Choice. Elsewhere, there is an intimate relationship between determinacy of the projective hierarchy and large cardinals unraveled by John Steel and Tony Martin during the 80's. We will present these results, together with their consequences and numerous applications. We will also discuss more recent works on games of slightly imperfect information, inherited from economics: the Blackwell games.

Nadine GESSLER, Neuchâtel

Quand les classes renversent les ensembles : le paradigme lesniewskien

On présentera la Méréologie, théorie collective des classes élaborée par S. Lesniewski à l'aube du XX^e siècle et qui s'inscrit historiquement en rupture des théories classiques des classes et des ensembles, marquées par l'antinomie dite de Russell. On esquissera aussi les traits caractéristiques de la théorie logique dans laquelle elle s'inscrit, l'Ontologie, un calcul extensionnel des noms d'ordre supérieur investi de compétences fondatrices à l'égard du logicisme. On verra ainsi comment le paradigme lesniewskien distingue et concilie le point de vue de la classe comme entité collective avec une approche purement extensionnelle, résolvant par cette distinction même le problème posé par l'antinomie.

Pierre JORAY, Rennes

Classes et extensions dans les définitions logicistes du nombre

L'introduction malheureuse des extensions de concepts dans le domaine logique fut la conséquence de deux réquisits du logicisme de G. Frege : d'une part rendre compte de la conviction que les nombres sont des *objets*, de l'autre que

seules soient utilisées des *définitions explicites* des notions mathématiques. Nous examinerons ici deux versions contemporaines du logicisme. La première, dite *néo-frégéenne* (G. Boolos, B. Hale, C. Wright), vise à préserver l'essentiel du programme frégéen en affaiblissant le réquisit définitoire, puisque l'arithmétique y est construite sur la base d'un principe d'abstraction, considéré à titre de *définition implicite* de la notion de nombre. La seconde, dite *catégorielle* et basée sur la logique de S. Lesniewski (C. Degrange, N. Gessler, P. Joray), retient au contraire l'importance attachée au caractère *explicite* des définitions. Si les nombres n'y sont pas construits à titre d'objets, on peut y voir exploitée une distinction nette entre *classes concrètes* et *extensions pures* permettant d'éradiquer à sa source le paradoxe de Russell.

Jean-Claude PONT, Genève

Titre non communiqué

Michael POTTER, Cambridge

How does a Set depend on its Members?

The iterative conception long ago took over from limitation of size as the guiding idea in our understanding of set theory. According to this conception a set depends on its members. But how? If sets are necessarily existent, it cannot be a modal dependence. If sets are atemporal, it cannot be a temporal dependence. I shall discuss the possibilities that remain

Peter SIMONS, Leeds

Structural Subsumption and the Significance of Sets

Sets in mathematics are typically motivated in one of two ways. Either they are presented as the rigorous mathematical descendants of the intuitive notion of collection, or they are treated as fundamental undefined entities. Both ap-

proaches have their drawbacks. The former badly misrepresents the notion of collection, and present sets to outsiders (especially philosophers) under a false flag as innocuous and familiar. The second, while mathematically unobjectionable and intellectually honest, leaves the utility of sets to be uncovered subsequently by their application. A better way to understand sets is available. Treating pure mathematics as the science of pure structure, we consider when one structure is subsumed in another. Subsumption can take two forms: one structure is a substructure of another, that is, all its unstructured parts are parts of the larger, or one structure is included as a whole within another, typically with additional structure linking it to other parts of the whole. In either case, by ignoring the structural relations and focusing on just the cardinality of the parts, we arrive - by structural impoverishment - at the subset relation in the former case and the element relation in the second. Sets are structurally challenged structures, and the element relation is direct structural containment. So the utility of set theory and its affinity to cardinal number theory are both explained at a stroke.

Denis VERNANT, Grenoble

La genèse de la notion de classe chez Russell

Il s'agira de suivre dans les *Principles of Mathematics* la genèse de la notion de classe chez Russell et de déterminer les problèmes techniques et philosophiques qu'elle pose. On examinera en particulier en quoi elle se distingue de la notion de totalité.