Rallye mathématique de Neuchâtel

ARRET PROVISOIRE DU RALLYE !

Devant le peu d'intérêt suscité par le rallye-problèmes en 2020-21, l'équipe est au regret de devoir suspendre le rallye : six personnes qui organisent un rallye pour trois participants (dont un seul étudiant), cela nous paraît disproportionné. Il semblerait que le surcroît de travail occasionné depuis la rentrée de septembre par l'enseignement en hybride puis à distance, ait découragé une majorité d'entre vous à s'attaquer à nos problèmes.

Nous nous mettons donc en hibernation jusqu'à des jours meilleurs, avec la ferme intention de ressusciter le rallye quand l'ambiance sera moins pesante.

Prenez soin de vous et des autres !

L'équipe du rallye : Elisa, Laura, Alain, Alex, Laurent, Léonard.

Solutions de l'Étape 2

Problème 1

Montrer que, dans tout triangle du plan euclidien, le double de la somme des carrés des côtés est strictement inférieur au carré du périmètre.

Solution. Soient a, b, c les longueurs des 3 côtés. Par inégalité triangulaire, on a $a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b$. On multiplie la première inégalité par a, la deuxième par b, la troisième par c, et on somme :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

On ajoute $a^2 + b^2 + c^2$ à chaque membre :

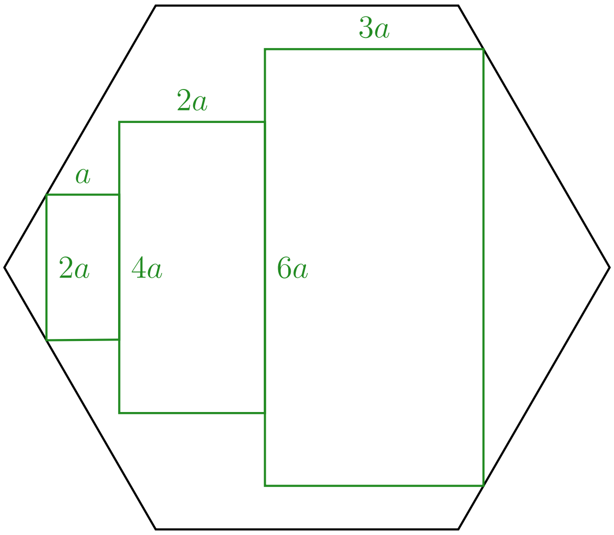
$$2(a^2 + b^2 + c^2) < (a + b + c)^2.$$

Solutions correctes : F. Périat, F. Sigrist (prof. émérite UniNE), H. Vermeiren (prof. ERSO, Belgique).

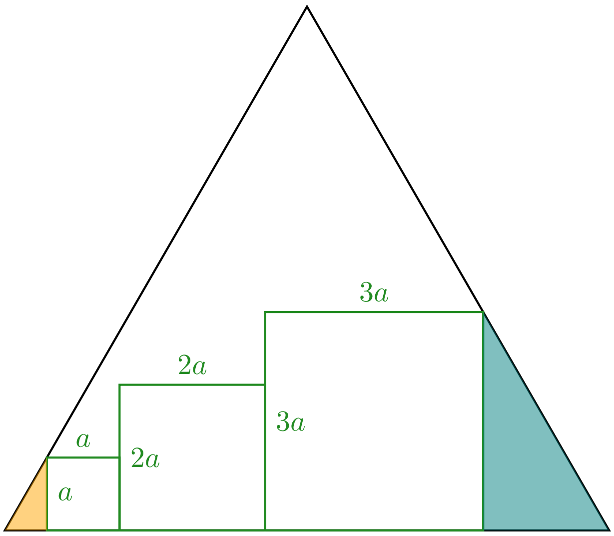
□

Problème 2

On considère l'hexagone régulier suivant, dont la longueur des côtés vaut $\frac{1}{2}$. Que vaut a ?



SOLUTION. On voit que, par symétrie, on peut résoudre le problème dans un triangle équilatéral dont la longueur des côtés est 1.



On remarque de plus que les triangles oranges et bleus sur le dessin ci-dessus sont semblables de rapport 3. Ainsi, la base du triangle orange a une longueur de $\frac{a}{\tan(\pi/3)} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ et on peut décomposer la base du triangle équilatéral comme

$$\frac{a}{\sqrt{3}} + 6a + \frac{3a}{\sqrt{3}} = 1.$$

La résolution ne pose pas de problème et donne

$$a = \frac{9 - 2\sqrt{3}}{46}.$$

Solutions correctes : F. Périat, F. Sigrist (prof. émérite UniNE), H. Vermeiren (prof. ERSO, Belgique). □

PROBLÈME 3

Les 12 chiffres d'une horloge sont peints autour d'une circonférence : $1, 2, ..., 12$. Chacun des 12 chiffres est peint en bleu ou en rouge, six sont peints en bleu et six sont peints en rouge. Montrer que, quel que soit la façon dont ils ont été peints, il y aura toujours une ligne qui divise l'horloge en deux, laissant six chiffres de chaque côté, trois peints en rouge et trois peints en bleu.

SOLUTION. On commence pour prendre une ligne quelconque qui divise l'horloge en deux. On compte combien de chiffres sont peints en bleu dans l'un de côtés. Disons que $b \in \{0, 1, ..., 6\}$ chiffres sont bleus. Si $b = 3$ on a finit. Sinon on déplace la ligne autour de l'horloge en prenant un nouveau chiffre et en laissant sortir le dernier des chiffres qu'on avait. Le nombre des éléments bleus à changé en $-1, 0$ ou $+1$. Après avoir faite cette opération 6 fois on est en train de considérer la ligne initiale mais l'ensemble de chiffres de l'autre côté, donc on a $6 - b$ éléments bleu. Pour aller de b à $6 - b$ en additionnant $-1, 0$ ou $+1$, on a du nécessairement être passé par une configuration avec 3 chiffres bleus de chaque côté.

Solutions correctes : F. Périat, F. Sigrist (prof. émérite UniNE) □