UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 2

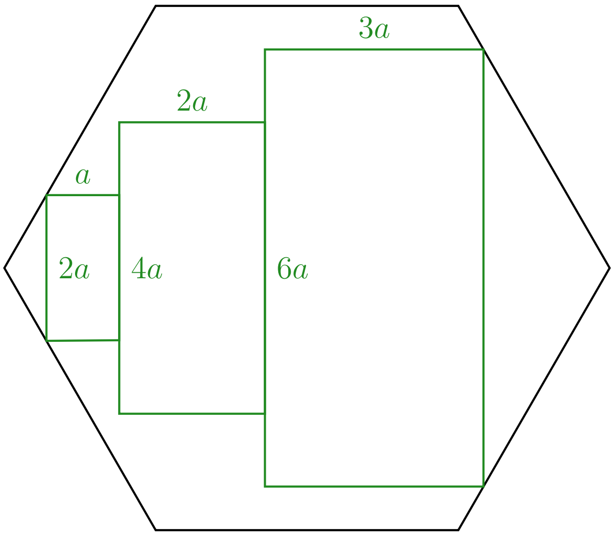
Du 12 octobre au 06 novembre

Problème 1

Montrer que, dans tout triangle du plan euclidien, le double de la somme des carrés des côtés est strictement inférieur au carré du périmètre.

Problème 2

On considère l'hexagone régulier suivant, dont la longueur des côtés vaut $\frac{1}{2}$. Que vaut a ?



Problème 3

Les 12 chiffres d'une horloge sont peints autour d'une circonférence : $1, 2, \ldots, 12$. Chacun des 12 chiffres est peint en bleu ou en rouge, six sont peints en bleu et six sont peints en rouge. Montrer que, quel que soit la façon dont ils ont été peints, il y aura toujours une ligne qui divise l'horloge en deux, laissant six chiffres de chaque côté, trois peints en rouge et trois peints en bleu.

RÈGLES

1. Vos solutions doivent être soumise avant le **06 novembre, 23h59** sur la page Moodle du Rallye (`https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=4898`).
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. Vos solutions doivent être **individuelles**. Deux solutions trop similaires se verront attribuer 0 point.
5. Les étudiants ayant à la fin de l'année académique **au moins 9 points sur 18** se verront remettre un prix.

Nous vous souhaitons beaucoup de plaisir avec ce rallye !

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE DE PERALTA, Laurent HAYEZ, Elisa LORENZO GARCÍA, Leonard TSCHANZ, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.

Solutions de l'Étape 1

Problème 1

On choisit au hasard deux nombres réels b et c (non nécessairement distincts) dans l'intervalle $[0;1]$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation $z^2+bz+c=0$ soient à une distance inférieure ou égale à 1 dans le plan complexe ?

Solution. Si $b^2-4c \geq 0$ (resp. $b^2-4c \leq 0$), les deux racines sont réelles (resp. complexes conjuguées), et la distance entre les racines est $\sqrt{b^2-4c}$ (resp. $\sqrt{4c-b^2}$). Dans le cas des racines réelles, on trouve $\frac{b^2-1}{4} \leq c$, inégalité toujours satisfaite sur le carré $[0,1]\times[0,1]$, donc ce cas fournit seulement la partie du carré sous la parabole $c=\frac{b^2}{4}$. Dans le cas des racines complexes conjuguées, on trouve $c \leq \frac{b^2+1}{4}$, ce qui fournit la zone du carré entre les paraboles $c=\frac{b^2+1}{4}$ et $c=\frac{b^2}{4}$. En prenant la réunion des 2 cas, on trouve la partie du carré sous la parabole $c=\frac{b^2+1}{4}$. L'aire de cette zone est $\int_0^1 \frac{b^2+1}{4}\,db = \frac{1}{3}$.

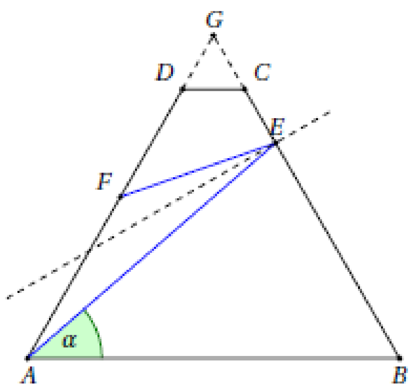
Solutions correctes : F. Sigrist (prof. émérite UniNE), H. Vermeiren (prof. ERSO, Belgique).

□

Problème 2

Un trapèze est **isocèle** s'il possède au moins un axe de symétrie perpendiculaire aux bases. Le trapèze isocèle $ABCD$ a pour bases AB et CD. On sait que $AB=6$, $AD=5$ et l'angle $DAB=60$. On lance un rayon de lumière depuis A qui se réfléchit sur CB en un point E et coupe AD en un point F. Si $AF=3$, calculer l'aire du triangle AFE.

Solution. On définit le point G comme le point d'intersection des droites AD et BC. Le triangle ABG est équilatéral parce que $60 = GAB = ABG$ et alors $AGB = 180-2\cdot 60 = 60$. Donc $AB=BG=GA=6$.



(Image par Hugues Vermeiren.)

On dénote l'angle EAB par α. Alors l'angle $AEB = 120-\alpha = FEG$ et les triangles FEG et AEB sont équivalents. En particulier, $\frac{EB}{EG} = \frac{BA}{GF} = \frac{6}{6-3} = 2$ et $EB + EG = 6$, alors $EG = 2$ et $EB = 4$.

Finalement, on fait le calcul

$$[AEF] = [ABG] - [FEG] - [ABE] = \\ \frac{6 \cdot 6 \cdot \sin 60}{2} - \frac{5}{4}[ABE] = 9\sqrt{3} - \frac{5}{4}\frac{6 \cdot 4 \cdot \sin 60}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Solutions correctes : F. Sigrist (prof. émérite UniNE), H. Vermeiren (prof. ERSO, Belgique). □

PROBLÈME 3

On dit qu'un nombre est **suisse** s'il est formé par le nombre 1291 répété une ou plusieurs fois. Par exemple 1291, 12911291 ou 129112911291 sont des nombres suisses, mais 911291 ou 12911292 ne sont pas des nombres suisses. Existe-t-il un nombre suisse qui est un carré parfait ?

SOLUTION. La réponse est : Non !

Si un nombre entier est pair, son carré est divisible par 4 puisque $(2k)^2 = 4k^2$. Si un nombre entier est impair, son carré est de la forme $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod 4$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^2 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 1 \pmod 4 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarquons à présent que $1291 \equiv 3 \pmod 4$, puisque $1291 = 322 \cdot 4 + 3$. Remarquons encore qu'un nombre suisse est de la forme $10000k + 1291$ où k est 0 ou un nombre suisse. Ainsi, si s est un nombre suisse, 10000 étant divisible par 4, on a

$$s = 10000k + 1291 \equiv 3 \pmod 4$$

et donc s ne peut pas être le carré d'un entier.

Solutions correctes : F. Périat, F. Sigrist (prof. émérite UniNE) □