Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 5

Du 16 mars au 13 avril

IMPORTANT : Pendant la suspension des cours à l'Uni, prière d'envoyer vos solutions TeXées ou scannées exclusivement par e-mail à un des 5 membres de l'équipe "Rallye". Merci !

PROBLÈME 1

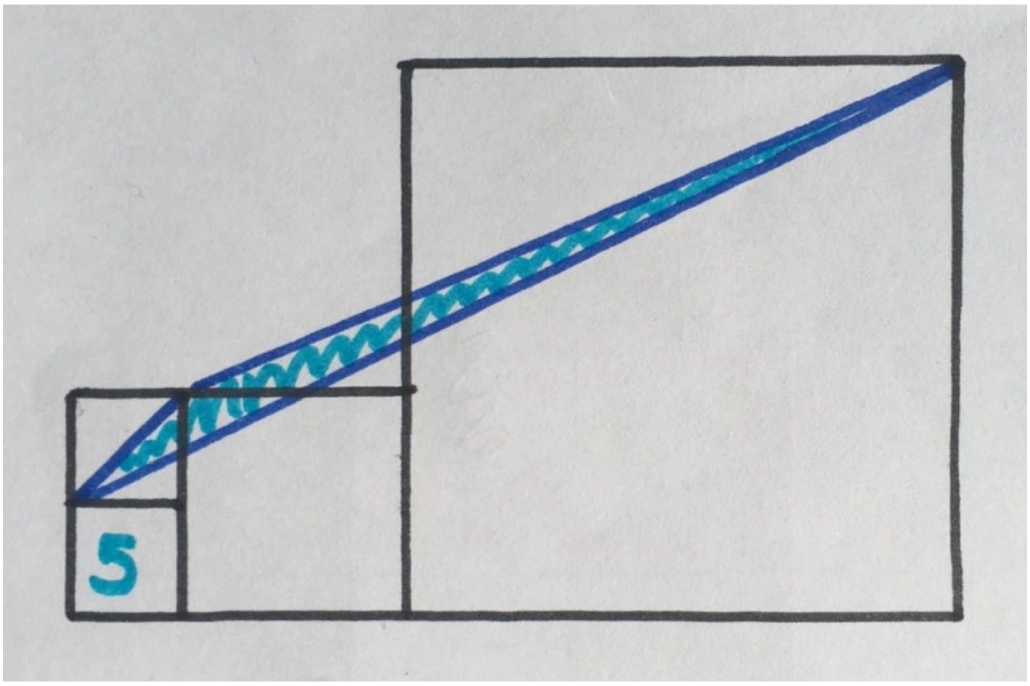
Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ un ensemble stable par addition et tel que $\text{PGDC}(A) = 1$. Démontrer alors que A contient tous les entiers à partir d'un certain rang.

PROBLÈME 2

Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

PROBLÈME 3

La figure suivante comporte quatre carrés, et l'aire du plus petit carré vaut 5. Quelle est l'aire du triangle bleu ?



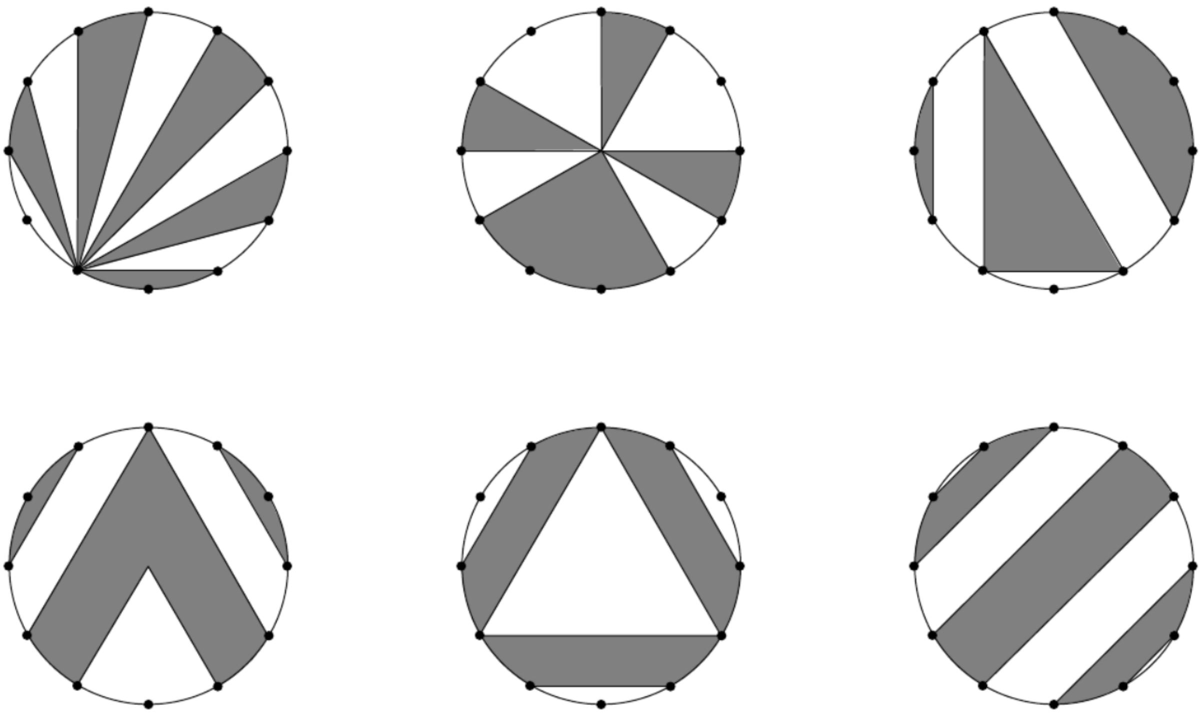
Règles

1. Vos solutions doivent être soumise avant le **10 avril, 14h00** au secrétariat de l'institut de mathématiques.
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. Vos solutions doivent être **individuelles**. Deux solutions trop similaires se verront attribuer 0 point.
5. Les étudiants ayant à la fin de l'année académique **au moins 9 points sur 18** se verront remettre un prix.

Solutions de l'Étape 4

PROBLÈME 1

Voici six montres circulaires. Trouver la proportion colorée de chaque montre.



La réponse est valable si :

- Ou bien : les six réponses sont justes et justifiées.
- Ou bien : au moins quatre réponses sont justes et justifiées par un argument SANS calcul.

SOLUTION. Pour les 6 montres la proportion demandée vaut $\frac{1}{2}$.

Réponses correctes : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, M.Mathey, F. Périat, F. Spicher.

□

PROBLÈME 2

Déterminer le plus petit entier positif $x > 0$ tel que $2x$ soit un carré et $3x$ un cube.

SOLUTION. Ecrivons $x = 2^a 3^b m$ où m est impair non divisible par 3. Alors $2x = 2^{a+1}3^b m$ est un carré si et seulement si $a+1$ et b sont pairs, et m est un carré. De même $3x = 2^a 3^{b+1} m$ est un cube si et seulement si a et $b+1$ sont multiples de 3, et m est un cube. Donc x vérifie les deux conditions demandées si et seulement si a est impair et multiple de 3, $b+1$ est impair et multiple de 3, et m est une puissance sixième. Les plus petites valeurs possibles sont $a = 3, b = 2$ et $m = 1$, ce qui donne $x = 72$.

Réponses correctes : J. Cordova, T. Letourmy, M. Mathey, F. Périat, F. Spicher

□

PROBLÈME 3

On définit une suite de nombres T_n par $T_1 = 2$ et $T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1$ pour $n \geq 1$. Montrer que si $m \neq n$, alors T_m et T_n sont premiers entre eux. Montrer également que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{T_i} = 1.$$

La réponse est valable si les deux parties de la question sont traitées correctement.

SOLUTION. On remarque que

$$T_{n+1} = T_n^2 - T_n + 1 = T_n(T_n - 1) + 1 = T_n(T_{n-1}T_{n-2}\cdots T_1) + 1 = 1 + T_1 \cdots T_n.$$

Pour $m < n$, T_m divise $T_1 \cdots T_{n-1} = T_n - 1$. Donc $\mathrm{pgdc}(T_m, T_n) = 1$, ce qui montre que T_m et T_n sont premiers entre eux (et aussi qu'il y a une infinité de nombres premiers).

On voit facilement que, puisque $T_1 > 1$, $(T_n)_n$ est une suite strictement croissante non bornée. Donc $T_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Montrons par induction que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T_i} = 1 - \frac{1}{T_{n+1} - 1}.$$

On a $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{T_2 - 1} = 1 - \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2}$. Supposons que la propriété soit vraie pour $n > 0$, on a alors

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{T_i} = 1 - \frac{1}{T_{n+1} - 1} + \frac{1}{T_{n+1}} = 1 - \frac{1}{T_{n+1}(T_{n+1} - 1)} = 1 - \frac{1}{T_{n+2} - 1}.$$

Entre la récurrence et le fait que $T_n \to \infty$, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{T_i} = 1.$$

Réponses correctes : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, F. Périat, F. Spicher □

Les 3 problèmes de l'étape 4 ont aussi été résolus correctement par F. Sigrist (Prof. honoraire UniNE) et H. Vermeiren (Prof. à l'Ecole Royale de sous-officiers, Belgique).

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE DE PERALTA, Laurent HAYEZ, Felix SCHLENK, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.