Rallye mathématique de Neuchâtel

Solutions de l'étape 6 et palmarès

PROBLÈME 1

On considère un ensemble de 17 personnes où chaque individu connaît exactement 4 autres personnes du groupe. Montrer qu'il existe deux personnes qui ne se connaissent pas et qui n'ont pas de connaissances en commun.

SOLUTION. On représente chaque personne comme un point du plan. Deux points sont reliés par un trait si et seulement si elles se connaissent. On obtient donc un graphe où les sommets sont des personnes et les arêtes décrivent le fait de se connaître.

Prouvons le résultat en faisant un raisonnement par l'absurde.

Supposons que chaque sommet A soit relié à chacun des 16 autres soit directement soit via une tierce personne. Le sommet A est relié a exactement 4 autres sommets directement, et chacun d'entre eux est relié à trois autres personnes exactement. Le graphe ne contient donc pas d'autres sommets et les 17 sommets déjà dessinés sont distincts. Si on ne regarde que les arêtes du graphe qui pointent vers A, on voit un arbre à 16 arêtes.

Les arêtes qu'il nous reste à mettre, il y en a $17 \cdot \frac{4}{2} - 16 = 18$, ne peuvent relier entre elles que les "feuilles" de l'arbre. Chacune de ces 18 arêtes définit un cycle basé en A qui est composé d'exactement 5 arêtes. Comme A a été choisi de façon arbitraire, il y a exactement 18 cycles qui passent par chacun des 16 autres sommets du graphe. Chaque cycle passe par 5 sommets. Il y a donc en tout $18 \cdot \frac{17}{5}$ cycles. Mais ceci est absurde car le nombre de cycles dans un graphe doit être un nombre entier !

Solution correcte : P. Bidet $\square$

PROBLÈME 2

Montrer que, pour tout nombre premier p, le nombre $2^p + 3^p$ n'est pas une puissance d'entier.

SOLUTION. On commence par vérifier le résultat pour $p = 2$ et $p = 5$. Pour $p = 2$ on a $2^2 + 3^2 = 13$; pour $p = 5$ on a $2^5 + 3^5 = 275$; dans les 2 cas ce ne sont pas des puissances d'entiers. On peut donc supposer $2 \neq p \neq 5$, en particulier p est impair. Donc $5 = 2+3$ divise 2^p+3^p, et il suffit donc de montrer que 25 ne divise pas 2^p+3^p. Mais on a par le binôme de Newton :

$$2^p + 3^p = 2^p + (-2+5)^p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} (-2)^k 5^{p-k}$$

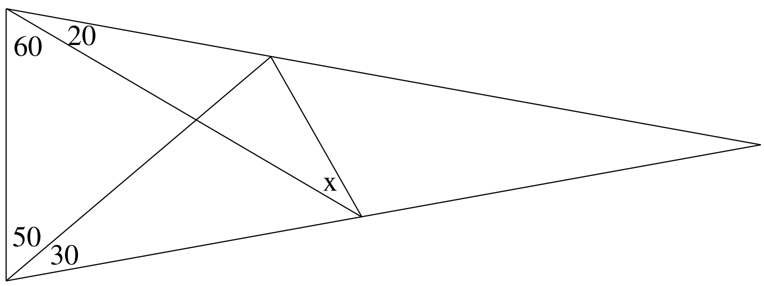
et dans la somme 5^2 divise tous les termes sauf le dernier terme, obtenu pour $k =$

$p-1$: ce terme vaut $p(-2)^{p-1}5$ et comme p est premier et distinct de 5 ce terme n'est pas divisible par 25.

Solution correcte : P. Bidet, T. Letourmy, F. Périat $\square$

PROBLÈME 3

Que vaut l'angle x ?



SOLUTION. x vaut 30°, voir la solution sur
`https://www.youtube.com/watch?v=HQc-54hQ8kw`

Solution correcte : F. Périat, F. Spicher $\square$

Les 3 problèmes de la 6ème étape ont été aussi résolus correctement par F. Sigrist (prof. honoraire).

PROBLÈME 4

LE PROBLEME "BONUS" !

Soit $Sym(n)$ le groupe des permutations sur n objets. Soient a et b deux éléments de $Sym(n)$ choisis au hasard, avec probabilité $\frac{1}{n!}$. Est-il vrai que la probabilité que a et b aient le même ordre est asymptotiquement de $\frac{1}{n^2}$?

SOLUTION (DE T. LETOURMY). Soit $0 \leq i < n$. On note P_n la probabilité que a et b aient le même ordre, et $A_{n,i}$ l'évènement « on obtient deux $(n-i)$-cycles ». On remarque tout d'abord que

$$P_n \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_{n,i}\right). \tag{1}$$

Ensuite, le nombre de $(n-i)$-cycles dans $Sym(n)$ étant donné par

$$\binom{n}{n-i}(n-i-1)! = \frac{n!}{n-i} \cdot \frac{1}{i!} \geq \frac{(n-1)!}{i!},$$

on obtient

$$\mathbb{P}\left(A_{n,i}\right) = \frac{\left(\binom{n}{n-i}(n-i-1)!\right)^2}{(n!)^2} \geq \frac{1}{(i!)^2 n^2}. \tag{2}$$

Alors en combinant les équations (1) et (2), et en utilisant qu'obtenir deux $(n-i)$-cycles est un évènement indépendant d'obtenir deux $(n-j)$-cycles lorsque $i \neq j$, on obtient

$$P_n \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_{n,i}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(A_{n,i}) \geq \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(i!)^2}. \tag{3}$$

On conclut donc par l'équation (3) que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{\frac{1}{n^2}} \geq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i!}\right)^2 > 1,$$

et donc que P_n n'est pas asymptotiquement égal à $\frac{1}{n^2}$. □

Remarque : Bien que P_n ne soit pas asymptotiquement égale à $\frac{1}{n^2}$, il est conjecturé que P_n est asymptotiquement **proportionnelle à** $\frac{1}{n^2}$. Le problème ouvert en question est le suivant : soient σ, τ deux variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $Sym(n)$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\sigma| = |\tau|) = \frac{C}{n^2}$$

avec $\approx 4.2634 \leq C \leq 12$.

Solution correcte : T. Letourmy

Palmarès du Rallye mathématique 2019-2020

Ont obtenu au moins 9 points et gagnent un prix :

Grand vainqueur : Thomas LETOURMY (Master) avec 17 points.

Second : Pablo BIDET (2è Bachelor) avec 16 points.

Troisième : Jonathan CORDOVA (3è Bachelor) avec 14 points.

Quatrième : Florian SPICHER (2è Bachelor) avec 12 points.

Cinquièmes (ex-aequo) : Maxime MATHEY (Master) et Florent PÉRIAT (1ère Bachelor) avec 9 points.

Mentions honorables :

Léonard TSCHANZ (Master) avec 6 points et Morgane ZIEGLER (3è Bachelor) avec 3 points.

BRAVO À TOUS LES PARTICIPANTS !

Une petite remise des prix aura lieu à la Plaine du Mail le vendredi 12 juin à 13h30, avant le tournoi de pétanque de l'Institut. Qu'on se le dise !

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE DE PERALTA, Laurent HAYEZ, Felix SCHLENK, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.