UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL

Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 6 (la dernière!)

Du 20 avril au 18 mai

PROBLÈME 1

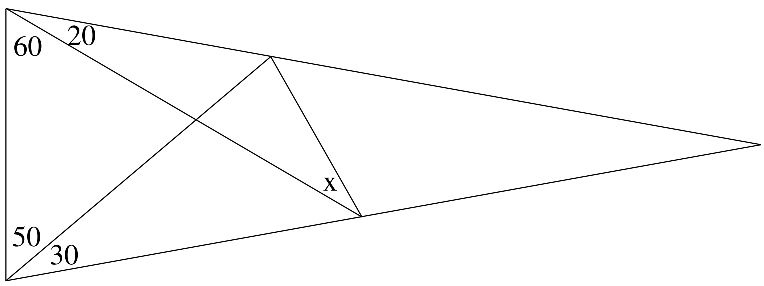
On considère un ensemble de 17 personnes où chaque individu connaît exactement 4 autres personnes du groupe. Montrer qu'il existe deux personnes qui ne se connaissent pas et qui n'ont pas de connaissances en commun.

PROBLÈME 2

Montrer que, pour tout nombre premier p, le nombre $2^p + 3^p$ n'est pas une puissance d'entier.

PROBLÈME 3

Que vaut l'angle x ?



PROBLÈME 4

VOICI UN PROBLEME "BONUS" POUR DEPARTAGER LES EX-AEQUO !

Soit $Sym(n)$ le groupe des permutations sur n objets. Soient a et b deux éléments de $Sym(n)$ choisis au hasard, avec probabilité $\frac{1}{n!}$. Est-il vrai que la probabilité que a et b aient le même ordre est asymptotiquement de $\frac{1}{n^2}$?

Règles

1. Vos solutions doivent être soumise avant le **18 mai, 14h00** par e-mail à un des membres de l'équipe "rallye".
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. Vos solutions doivent être **individuelles**. Deux solutions trop similaires se verront attribuer 0 point.
5. Les étudiants ayant à la fin de l'année académique **au moins 9 points sur 18** se verront remettre un prix.

Solutions de l'Étape 5

Problème 1

Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ un ensemble stable par addition et tel que PGDC$(A) = 1$. Démontrer alors que A contient tous les entiers à partir d'un certain rang.

Solution. Soit $A \subset \mathbb{N}^*$ un sous-ensemble stable par addition tel que PGDC$(A) = 1$. Il faut alors démontrer qu'il existe y tel que si $x \geq y$, alors $x \in A$. On suppose directement que $1 \notin A$ car sinon c'est fini. La preuve se fait en 3 étapes. On commence par démontrer qu'il suffit d'exhiber un élément a de A tel que $a + 1 \in A$. Dans ce cas il existe donc deux éléments $a, b \in A$ tels que PGDC$(a, b) = 1$. Par le théorème de Bézout, il existe $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$ca + db = 1.$$

Si c et d sont positifs, c'est terminé. Supposons sans perte de généralité que $c > 0$ et $d \leq 0$. Ainsi $q := -db \in A$. Alors on affirme que :

$$r \in A \quad \forall r \geq q^2.$$

En effet en utilisant l'algorithme de division euclidienne on a $r = nq + s$, où $0 \leq s < q$. Ainsi on peut réécrire r comme :

$$r = nq + s(ca - q) = (n - s)q + sca \in A.$$

Par stabilité on remarque que A est infini, on montre donc, dans un deuxième temps, qu'il existe $B \subset A$ un sous ensemble fini tel que PGDC$(B) =$ PGDC$(A) = 1$. On numérote les éléments de A par ordre croissant et on note $B_N = \{a_1, \ldots, a_N\}$ de sorte qu'on obtienne une "filtration", i.e. $B_N \subset B_{N+1}$ et $A = \bigcup_N B_N$. En notant $d_N =$ PGDC(B_N), on obtient une suite $(d_N)_{N \geq 1}$ monotone décroissante d'entiers positifs convergeant donc vers 1. Elle est donc constante à partir d'un certain rang N_0. Ce qui achève la démonstration de la seconde assertion.

Il nous reste à démontrer la première assertion, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $a+1 \in A$. En utilisant à nouveau Bézout sur B, on obtient :

$$1 = \mathrm{PGDC}(B) = \sum_{b \in B} r_b b,$$

où $r_b \in \mathbb{Z}$. Posons alors $R = \max_{b \in B} |r_b|$. Ainsi en posant $a = \sum_{b \in B} R \cdot b$, on a :

$$a + 1 = \sum_{b \in B} (R + r_b) b \in A.$$

Solution correcte : P. Bidet, M. Mathey, T. Letourmy, F. Spicher □

PROBLÈME 2

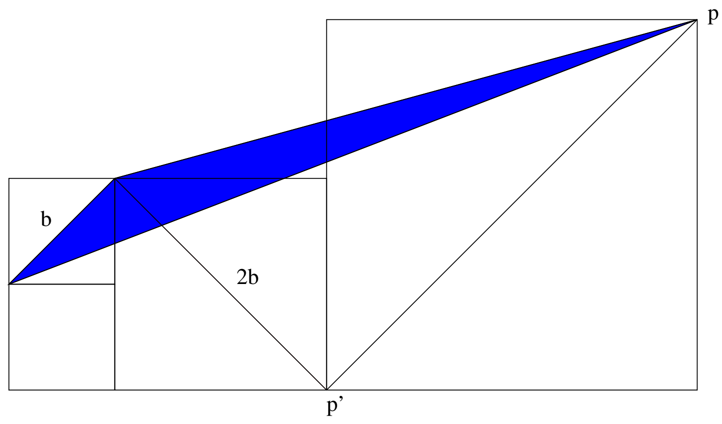
Trouver toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f'(x) = f(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

SOLUTION. L'équation $f'(x) = f(-x)$ montre que f' est dérivable. En dérivant on obtient $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$ donc $f'' + f = 0$. La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est $f(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. En faisant passer cette fonction dans l'équation de départ, on trouve $A = B$, donc la solution générale de l'équation de départ est $f(x) = A(\cos(x) + \sin(x))$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Solution correcte : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, F. Spicher. □

PROBLÈME 3

La figure suivante comporte quatre carrés, et l'aire du plus petit carré vaut 5. Quelle est l'aire du triangle bleu ?



SOLUTION. On cherche l'aire du triangle bleu. Comme l'aire d'un triangle est $\frac{1}{2}bh$ (b la base, h la hauteur) l'aire du triangle ne change pas si on prend n'importe quel point sur la diagonale du grand carré, par exemple p'. En effet cette diagonale est parallèle à la diagonale qui forme la base. Pour le nouveau triangle de sommet p', la hauteur vaut $h = 2b$. L'aire vaut donc b^2. Dans notre cas $b = \sqrt{10}$, donc l'aire vaut 10.

Solution correcte : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, F. Périat, F. Spicher

$\square$

Les 3 problèmes de la 5ème étape ont été aussi résolus correctement par P. Jolissaint (prof. associé) et F. Sigrist (prof. honoraire).

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE DE PERALTA, Laurent HAYEZ, Felix SCHLENK, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.