Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 2

Du 14 octobre au 08 novembre

Problème 1

Trois équipes, A, B et C jouent à la pétanque. À la fin de chaque mène, l'équipe gagnante joue contre l'équipe qui attendait. L'équipe perdante boit du pastis au bord du terrain en attendant de rejouer. À la fin de la journée, l'équipe A a joué 9 parties, l'équipe B a joué 8 parties, et l'équipe C a joué 5 parties.

Qui a joué la 7ème partie ?

Problème 2

Montrez que si E est un ensemble de nombres entiers de cardinalité 52, alors il contient deux éléments tels que la différence de leurs carrés est un multiple de 100. Peut-on faire mieux que 52 ?

Problème 3

Déterminer tous les triplets de nombres premiers (a, b, c) tels que les différences $b-a$, $c-b$ et $c-a$ sont également des nombres premiers. *On rappelle que* 1 *n'est pas un nombre premier !*

Règles

1. Vos solutions doivent être soumise avant le **08 novembre, 14h00** au secrétariat de l'institut de mathématiques.
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. Vos solutions doivent être **individuelles**. Deux solutions trop similaires se verront attribuer 0 point.
5. Les étudiants ayant à la fin de l'année académique **au moins 9 points sur 18** se verront remettre un prix.

Solutions de l'Étape 1

Problème 1

Soient C_1 et C_2 deux carrés dans le plan, d'aire 1 et de même centre.

1. Montrer *sans calcul* que l'aire de $C_1 \cap C_2$ est au moins $\frac{3}{4}$.
2. Trouver le plus grand $a \in (0,1)$ tel que l'aire de $C_1 \cap C_2$ est au moins a, pour toutes les positions de C_1, C_2.

SOLUTION. 1. Soit Q le carré $[-1,1]^2$, et soit Q_α le carré tourné par α. Alors $Q \cap Q_\alpha$ contient le disque de rayon 1. Donc

$$\frac{|Q \cap Q_\alpha|}{|Q|} \geq \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$$

2. On peut, bien sur, calculer $|Q \cap Q_\alpha|$ explicitement, bien que ceci est un peu ennuyeux. Avant de le faire, notons qu'il est plausible que $|Q \cap Q_\alpha|$ est minimal pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Pour cet α, on trouve facilement

$$\frac{|Q \cap Q_{\frac{\pi}{4}}|}{|Q|} = 2(\sqrt{2}-1) \approx 0.8285$$

qui n'est que 5 % plus grand que la borne inférieure 0.7854.

Pour justifier que $|Q \cap Q_\alpha|$ est minimal pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, nous devons montrer que l'aire des quatre triangles $Q \setminus Q_\alpha$ est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Un de ces triangles a comme sommets $(1,1)$, $(x(\alpha),1)$, $(1,y(\alpha))$. Un calcul montre que $x(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha} - \tan\alpha$ et $y(\alpha) = \tan\frac{\alpha}{2}$. L'aire de chaque triangle est donc

$$\frac{1}{2}(1-x(\alpha))(1-y(\alpha)) = \frac{(-1+\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\sin 2\alpha},$$

une fonction monotone croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Solutions correctes : J. Cordova, T. Letourmy, F. Périat, L.Tschanz.

□

Problème 2

L'institut de mathématiques de l'université de Neuchâtel organise une soirée pour Noël. Étant un petit institut, nous supposons que le nombre de participants à cette soirée n'est que de 6. Pour l'occasion, chacune des personnes apporte un cadeau de manière non nominative et avec le même papier d'emballage. Cependant la répartition des cadeaux se fait de manière étrange. En effet tout le monde dépose son cadeau dans une caisse lors de leur arrivée, puis lorsque minuit sonne chacun tire au hasard un paquet.
Quelle est la probabilité qu'au moins une personne ait reçu son propre cadeau ?

SOLUTION. D'abord une définition : un **dérangement** d'un ensemble E est une permutation de E sans point fixe.

On montre alors que, pour un ensemble E à n éléments, le nombre de dérangements de E, noté N_n, est donné par :

$$N_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

PREUVE (DE LA FORMULE DU NOMBRE DE DÉRANGEMENTS). On suppose sans perte de généralité que $E = \{1, \ldots, n\}$. De plus on sait que le nombre de permutations de E est $n!$.
On note A_i l'ensemble des permutations de E laissant fixe au moins l'élément i. On déduit donc que

$$N_n = \left| \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} \right| = |\mathrm{Sym}(E)| - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|.$$

Il suffit donc de déterminer la cardinalité de $\bigcup_i^n A_i$. Pour cela, utilisons la formule du crible :

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subset E, |I|=k} |A_I|,$$

où $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$. Ainsi on obtient :

$$\begin{aligned} N_n &= n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{I \subset E, |I|=k} (n-k)! \\ &= n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{k}{n} (n-k)! \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

□

Notons A l'événement "au moins une personne a reçu son propre cadeau". En constatant que le problème revient à calculer le nombre de permutations avec points fixes sur 6 éléments, on calcule la probabilité de l'événement complémentaire, noté A^c, afin d'utiliser le lemme précédent. Ainsi :

$$p(A^c) = \frac{N_6}{6!} = \frac{265}{720} = \frac{53}{144}.$$

Ainsi on trouve finalement $p(A) = 1 - p(A^c) = \frac{91}{144} \approx 0.632$.

Solutions correctes : P.Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, F. Spicher. □

Problème 3

Montrer que pour tout $N \geq 3$, $N \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|1+\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right|^2 = \frac{3}{2}.$$

Solution. Dans le plan euclidien, on considère le N-gone régulier de centre $(0,0)$ et de sommets $(\cos(\frac{2k\pi}{N}), \sin(\frac{2k\pi}{N}))$ pour $k = 0, 1, ..., N-1$ (faire un dessin !). Le centre de masse de ce polygone est $(0,0)$, donc

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = 0. \tag{1}$$

On en tire $\sum_{k=0}^{N-1}\cos\left(\frac{4k\pi}{N}\right) = 0$. En effet, dans (1) cela revient à sommer "un sommet du N-gone sur deux". Si N est pair, on obtient deux fois la somme (1) associée à un $\frac{N}{2}$-gone régulier ; si N est impair on obtient exactement la somme (1) dans un autre ordre (le dessin aide !). En utilisant $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, on en tire

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1}\sin^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right).$$

D'autre part $N = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = \sum_{k=0}^{N-1}\left(\cos^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right) + \sin^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right) = 2\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right)$, c-à-d.

$$\sum_{k=0}^{N-1}\cos^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right) = \frac{N}{2} \tag{2}$$

On a alors, par les équations (1) et (2) :

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(1+\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right)^2 = \sum_{k=0}^{N-1}\left(1+2\cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right)+\cos^2\left(\frac{2k\pi}{N}\right)\right) = N+0+\frac{N}{2} = \frac{3N}{2}.$$

Où a-t-on utilisé $N \geq 3$?

Solutions correctes : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourny, M. Mathey, F. Périat, F. Spicher, L. Tschanz. □

L'équipe "rallye" : Laura Grave de Peralta, Laurent Hayez, Felix Schlenk, Alain Valette, Alexandre Zumbrunnen. Vous pouvez récupérer vos solutions au bureau 208 (Alexandre et Laurent).