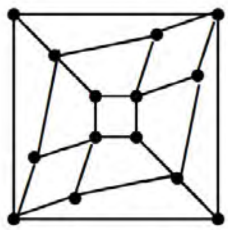
Rallye mathématique de Neuchâtel

Étape 3

Du 20 novembre au 19 décembre

Problème 1

Le graphe en pièce jointe représente 14 villes et les routes entre ces villes. Est-il possible de trouver un chemin qui passe par chaque ville exactement une fois ?

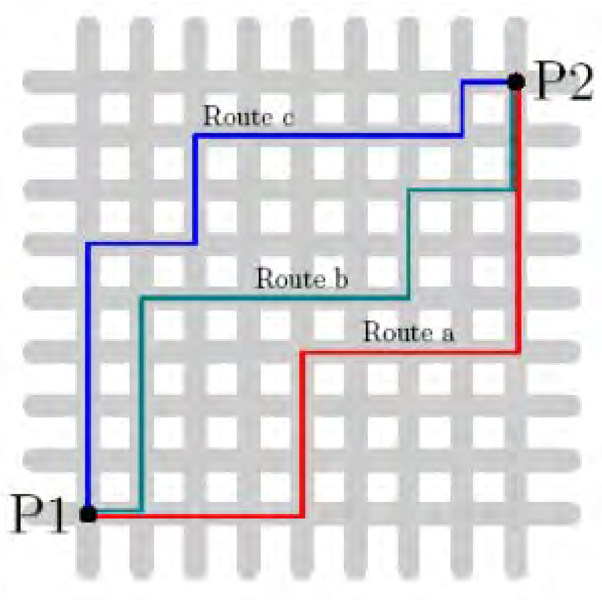


Problème 2

Pour $n \geq 2$, on donne $a_1, ..., a_n$ des entiers pas nécessairement différents. Montrer qu'il existe toujours un sous-ensemble non vide dont la somme est divisible par n.

Problème 3

Dans Mathville, au plan en damier, Alice habite en $P1$ et Bob habite en $P2$.



Ils décident de marcher l'un vers l'autre, Alice se dirigeant vers le Nord-Est, Bob vers le Sud-Ouest. Mais ils ont oublié qu'il y a plusieurs routes de même longueur allant de $P1$ à $P2$ (trois de ces routes sont illustrées sur le schéma ci-dessus), et ils ne se sont pas concertés sur leur itinéraire ! Quelle est la probabilité qu'Alice et Bob se rencontrent à mi-chemin ?

RÈGLES

1. Vos solutions doivent être soumise avant le **19 décembre, 23h59** sur la page Moodle du Rallye (`https://moodle.unine.ch/course/view.php?id=4898`).
2. Vos solutions doivent être soignées, et justifiées.
3. La solution d'un problème est jugée soit juste, soit fausse, ce qui rapporte 1 ou 0 point.
4. Vos solutions doivent être **individuelles**. Deux solutions trop similaires se verront attribuer 0 point.
5. Les étudiants ayant à la fin de l'année académique **au moins 9 points sur 18** se verront remettre un prix.

Nous vous souhaitons beaucoup de plaisir avec ce rallye !

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE DE PERALTA, Laurent HAYEZ, Elisa LORENZO GARCÍA, Leonard TSCHANZ, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.

1 Solutions de l'Étape 2

PROBLÈME 1

Soit S en ensemble fini de points dans le plan tels que tout ensemble de trois points parmi eux n'est pas contenu dans une droite. Pour chaque polygone convexe P dont les sommets sont dans S, on note $\alpha(P)$, le nombre de sommets de P et $\beta(P)$, le nombre de points de S en dehors de P. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\sum_P x^{\alpha(P)}(1-x)^{\beta(P)} = 1.$$

NB : Dans ce problème, un segment, un point et l'ensemble vide sont considérés comme des polygones à $2, 1$ et 0 sommets, respectivement.

SOLUTION. Pour chaque polygone convexe P dont les sommets sont dans S, on définit $\gamma(P)$ le nombre de points dans S qui sont à l'intérieur de P, de sorte que

$$\alpha(P) + \beta(P) + \gamma(P) = n := |S|.$$

À présent en notant $y = 1 - x$,

$$\begin{aligned}\sum_P x^{\alpha(P)} y^{\beta(P)} = \sum_P x^{\alpha(P)} y^{\beta(P)} (x+y)^{\gamma(P)} &= \sum_P \sum_{k=0}^{\gamma(P)} \binom{\gamma(P)}{k} x^{\alpha(P)+k} y^{\beta(P)+\gamma(P)-k} \\ &= \sum_P \sum_{k=0}^{\gamma(P)} \binom{\gamma(P)}{k} x^{\alpha(P)+k} y^{n-(\alpha(P)+k)}.\end{aligned}$$

On obtient donc une somme de termes de la forme $x^r y^{n-r}$ $(0 \leq r \leq n)$ multipliés par certains coefficients entiers non nuls.
Pour un r fixé, le coefficient devant $x^r y^{n-r}$ représente le nombre de façons de choisir un polygone convexe P, puis de choisir certains points de S à l'intérieur de P, de sorte que le nombre de sommets de P et le nombre de points choisis à l'intérieur de P soient conjointement égaux à r. Ceci revient simplement à choisir un sous-ensemble de r éléments dans S. Donc le coefficient devant $x^r y^{n-r}$ vaut $\binom{n}{r}$. Ainsi on obtient :

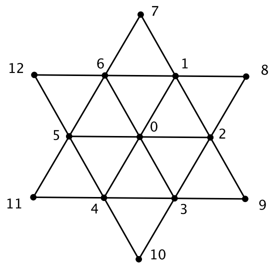
$$\sum_P x^{\alpha(P)} y^{\beta(P)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r} = (x+y)^n = 1.$$

Solutions correctes : aucune solution reçue.

□

PROBLÈME 2

L'étoile à 6 pointes de la figure est régulière : tous les angles internes des petits triangles sont égaux. On assigne à chacun des points numérotés une couleur : vert ou rouge. Montrer qu'il y aura toujours 3 points de la même couleur qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.



SOLUTION. On va supposer qu'il existe une configuration sans aucun triangle équilatéral de la même couleur et on va trouver une contradiction.

Sans perte de généralité on peut supposer que 0 est colorié en vert. Si parmi les sommets $1, 2, .., 6$ il y a 2 consécutifs en vert on trouve un triangle équilatéral avec 0. Alors il y a maximum 3 sommets verts non consécutifs, mais s'il y en a exactement 3 alors ils forment un triangle équilatéral. Donc il y a au moins 4 rouges et au maximum 2 verts ne sont pas consécutifs. De plus il ne peut pas y avoir 3 rouges en positions $1, 3, 5$ ou $2, 4, 6$. On peut supposer alors que $1, 2, 4$ et 5 sont rouges. Pour éviter que les triangles $2, 5, 7;\ 1, 2, 8;\ 1, 4, 9;\ 2, 5, 10;\ 4, 5, 11$ et $1, 4, 12$ ne soient coloriés en rouge on colorie les sommets $7, 8, .., 12$ en vert. Mais alors on a plusieurs triangles en vert, par exemple $7, 9, 11$. Cela nous donne une contradiction et par conséquent quelle que soit la manière de colorier les sommets il y aura toujours un triangle équilatéral avec ses sommets de la même couleur, soit vert, soit rouge.

Solutions correctes : Jonas Chevroulet, François Sigrist, Hugues Vermeiren. □

PROBLÈME 3

Un point du plan $\mathbb{R}^2$ est rationnel si ses deux coordonnées sont des nombres rationnels. Le plan $\mathbb{R}^2$ est-il recouvert par les segments fermés dont les extrémités sont des points rationnels ?

SOLUTION. La réponse est non. Notons A la réunion des segments dont les extrémités sont des point rationnels. L'équation de la droite passant par deux points rationnels donnés d'abscisses distinctes, est $y = ax + b$ avec a, b rationnels . Donc, si un point $(x, y) \in A$ est sur cette droite, les nombres réels $1, x, y$ sont linéairement dépendants sur $\mathbb{Q}$. En choisissant x, y tels que $1, x, y$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, par exemple $x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$, le point (x, y) n'est sur aucune droite de ce type. Comme $x \notin \mathbb{Q}$, il n'est pas non plus sur une droite verticale $x = c$ avec c rationnel. Le point (x, y) n'est donc pas dans A.

La théorie de la mesure permet d'affiner le résultat en montrant que presqu'aucun point de $\mathbb{R}^2$ n'est dans A. Soit m la mesure de Lebesgue du plan (intuitivement, $m(S)$ est l'aire de la partie S du plan). Comme un segment est de mesure nulle et que $\mathbb{Q}^2$ est dénombrable, on a $m(A) = 0$ - la partie A est "d'aire nulle".

La topologie a aussi son mot à dire. En observant que le complémentaire d'un segment fermé est un ouvert dense du plan, on voit que le complémentaire de A est une intersection dénombrable d'ouverts denses, donc est dense dans le plan par le théorème de Baire.

Solutions correctes : François Sigrist (Crans-Montana). $\square$