Déterminant symbolique et formule de Cramer

Maxime Zuber[1], *Gymnase français de Bienne*

I. Introduction

Dans un espace vectoriel de dimension $n-1$, une famille $V = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ de n vecteurs, est forcément liée; c'est-à-dire qu'il est possible d'écrire le vecteur nul $\mathbf{0}$ sous la forme d'une combinaison linéaire

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \boldsymbol{v}_n,$$

autre que triviale. Dans le présent article, nous allons montrer comment déterminer les coefficients α_i et découvrir le sens géométrique de ces derniers.

Dimension 1

Si $\boldsymbol{a} = a \cdot \boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{b} = b \cdot \boldsymbol{e}$ sont deux vecteurs non nuls d'un espace vectoriel E de base $\{\boldsymbol{e}\}$, alors la combinaison linéaire non triviale $\mathbf{0} = b \cdot \boldsymbol{a} - a \cdot \boldsymbol{b}$, donne le vecteur nul. Notons que cette dernière peut s'écrire sous la forme du déterminant symbolique

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ a & b \end{vmatrix} = \mathbf{0}.$$

Dimension 2

Si, dans une base $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}\}$ d'un espace vectoriel E de dimension 2, trois vecteurs non nuls ont pour composantes $\boldsymbol{a} = \binom{a_1}{a_2}$, $\boldsymbol{b} = \binom{b_1}{b_2}$ et $\boldsymbol{c} = \binom{c_1}{c_2}$, alors le même déterminant symbolique

$$\boldsymbol{x} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = x_1 \cdot \boldsymbol{e_1} + x_2 \cdot \boldsymbol{e_2} = \mathbf{0}, \qquad (\star)$$

fournit une combinaison linéaire non triviale exprimant le vecteur nul $\mathbf{0}$. En effet, la composante x_i $(i = 1, 2)$ du vecteur $\boldsymbol{x}$, qui est donnée par l'évaluation du déterminant

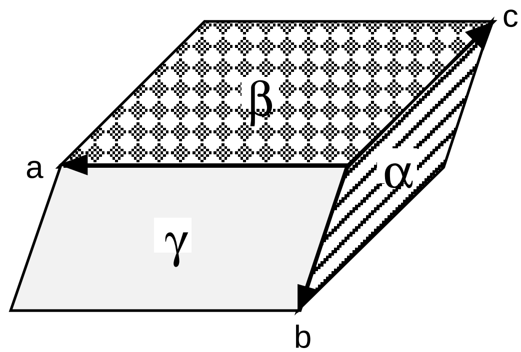
$$x_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

[1]Sur une idée originale de M. Alain Robert, professeur à l'Université de Neuchâtel.

est nulle, car deux lignes de ce dernier sont égales ! En développant ce déterminant selon la première ligne, la relation ($\star$) se traduit sous la forme de la combinaison linéaire

$$\underbrace{\det(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}_{\alpha}\cdot\boldsymbol{a}-\underbrace{\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})}_{\beta}\cdot\boldsymbol{b}+\underbrace{\det(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}_{\gamma}\cdot\boldsymbol{c}=\mathbf{0},$$

dans laquelle le coefficient d'un vecteur est donné, au signe près, par l'aire du parallélogramme défini par les deux autres vecteurs.



Dimension 3

Le même raisonnement en dimension 3 conduit à la relation suivante (qu'on tire ordinairement de ladite *formule de Gibbs*)

$$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})\cdot\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{d}=\mathbf{0}.$$

Ici également, le coefficient d'un vecteur est donné, au signe près, par le volume du parallélépipède construit sur les trois autres vecteurs. Ce dernier est défini par le *produit mixte* ou le déterminant des trois vecteurs.

II. Résultat général

Avec la même démonstration que celle présentée en dimension 2, on peut établir le résultat général suivant.

Théorème - *Soit, dans un espace vectoriel E de dimension $n-1$, une famille de n vecteurs $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, ..., $\boldsymbol{v}_n$, dont les composantes dans une base quelconque sont contenues dans les matrices colonnes (ν_1), (ν_2), ..., (ν_n). On a alors la relation formelle*

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \dots & \boldsymbol{v}_n \\ (\nu_1) & (\nu_2) & \dots & (\nu_n) \end{vmatrix}=\mathbf{0}.$$

Cette dernière se traduit sous la forme de la combinaison linéaire

$$\alpha_1\cdot\boldsymbol{v_1}+\alpha_2\cdot\boldsymbol{v_2}+\cdots+\alpha_n\cdot\boldsymbol{v}_n=\mathbf{0},$$

liant les n vecteurs linéairement dépendants et dans laquelle le coefficient α_i de chaque vecteur $\boldsymbol{v}_i$ est donné, au signe près, par le déterminant des $n-1$ autres vecteurs

$$\alpha_i = (-1)^{i+1} \det(\boldsymbol{v}_j, j = 1, \ldots, n, j \neq i).$$

III. Relation avec la règle de Cramer

Résoudre le système linéaire d'ordre n

$$(S) \ : \ \left\{ \begin{array}{lcl} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \cdots + v_{1n}x_n & = & b_1 \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \cdots + v_{2n}x_n & = & b_2 \\ \qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n1}x_1 + v_{n2}x_2 + \cdots + v_{nn}x_n & = & b_n, \end{array} \right.$$

qui s'écrit

$$x_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + x_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{b},$$

avec $\boldsymbol{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, revient précisément à trouver une combinaison linéaire non triviale

$$x_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + x_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + x_n \cdot \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Or, en vertu de ce qui précède, on sait qu'il existe une combinaison de la forme

$$\alpha_1 \cdot \boldsymbol{v_1} + \alpha_2 \cdot \boldsymbol{v_2} + \cdots + \alpha_{n+1} \cdot \boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{0},$$

avec $\boldsymbol{v_{n+1}} = \boldsymbol{b}$ et $\alpha_i = (-1)^{i+1} \det(\boldsymbol{v}_j, j = 1, \ldots, n+1, j \neq i)$.

Deux cas peuvent alors se présenter. Si le déterminant du système est nul, c'est-à-dire si $\alpha_{n+1} = (-1)^{n+1} \det(\boldsymbol{v}_j, j = 1, \ldots, n) = 0$, alors le système est singulier. En revanche, si ce déterminant est non nul, alors on a

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} \cdot \boldsymbol{v_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}} \cdot \boldsymbol{v_2} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \cdot \boldsymbol{v}_n - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$

Il s'ensuit que l'inconnue x_k est donnée par

$$\begin{aligned} x_k &= (-1)^{n+1+k} \cdot \frac{\det(\boldsymbol{v}_j, j \neq k)}{\det(\boldsymbol{v}_j, j \neq n+1)} \\ &= \frac{\det(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_{k-1}}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v_{k+1}}, \ldots, \boldsymbol{v}_n)}{\det(\boldsymbol{v}_j, j \neq n+1)}. \end{aligned}$$

Cette dernière relation n'est autre que la célèbre *formule de Cramer*.