Fonctions conditionnellement de type négatif, représentations irréductibles et propriété (T)

Nicolas LOUVET, Yves STALDER et Alain VALETTE

11 décembre 2002

Abstract

This paper is devoted to conditionally negative definite functions on a locally compact group G, and their relation to representation theory and 1-cohomology. More precisely, we prove first that a normalized, conditionally negative definite function ψ on G is indecomposable if and only if the orthogonal representation of G constructed by GNS-construction, is irreducible. Next we define conditionally negative definite measures on G and we prove that, a Radon measure $\mathrm{d}\mu$ absolutely continous with respect to Haar measure $\mathrm{d}x$ is conditionally negative definite if and only if the Radon-Nikodym derivative $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$ is a conditionally negative definite function. We use this to prove that, on a compactly generated group G, any normalized conditionally negative definite function is the limit, uniformly on compact subsets of G, of convex combinations of indecomposable normalized conditionally negative definite functions. As a consequence, we show that if a compactly generated group has the property that the reduced 1-cohomology is zero for every irreducible representation of G, then the same holds for every unitary representation of G. This is related to a characterisation, by Y. Shalom [Sha00], of property (T) for compactly generated groups.

1 Introduction

Soit G un groupe topologique. Une fonction continue $\psi : G \to \mathbb{R}$ est *conditionnellement de type négatif* si

(i) $\psi(g^{-1}) = \psi(g)$ pour tout $g \in G$ et

(ii) Pout tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous $g_1, \ldots, g_n \in G$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \psi(g_i^{-1} g_j) \leqslant 0.$$

Une fonction conditionnellement de type négatif ψ est *normalisée* si $\psi(e) = 0$ (où e désigne l'élément neutre de G).

Pour obtenir des exemples, considérons une représentation orthogonale π, fortement continue, de G dans un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\pi$. Une fonction continue $b : G \to \mathcal{H}_\pi$ est un 1-cocycle par rapport à π si

$$b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g) \qquad \text{pour tous } g, h \in G.$$

La fonction $\psi(g) = \|b(g)\|^2$ est alors conditionnellement de type négatif normalisée. Il est bien connu (voir par exemple [HV89], §5.b) que cet exemple est général : en effet, une construction du type Gelfand-Naimark-Segal montre que, si $\psi : G \to \mathbb{R}$ est conditionnellement de type négatif normalisée, il existe un triple $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ où π_ψ est une représentation orthogonale, fortement continue, de G sur l'espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_\psi$, b_ψ est un 1-cocycle par rapport à π_ψ tel que $b_\psi(G)$ soit total dans $\mathcal{H}_\psi$, et $\psi(g) = \|b_\psi(g)\|^2$ pour tout $g \in G$. Le triple $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ est uniquement déterminé, à isomorphisme orthogonal près.

Notre première contribution consiste à examiner quand la représentation π_ψ est irréductible. Remarquons que l'ensemble des fonctions conditionnellement de type négatif normalisées sur G forme un cône que l'on note $CL(G)$. Nous disons que la fonction conditionnellement de type négatif normalisée ψ est indécomposable si ψ se trouve sur une génératrice extrémale du cône $CL(G)$. Notre premier résultat, énoncé sans démonstration par A. Vershik et S. Karpushev ([VK84], théorème 1), est

Théorème 1

(i) Soient ψ une fonction conditionnellement de type négatif normalisée sur G et $(\mathcal{H}_\psi, \pi_\psi, b_\psi)$ le triple obtenu par construction GNS.

Si ψ est indécomposable alors la représentation orthogonale π_ψ est irréductible.

(ii) Soient π une représentation orthogonale et ψ une fonction conditionnellement de type négatif normalisée associée à π (c'est-à-dire une fonction de la forme $\psi = \|b(.)\|^2$ où b est un 1-cocycle par rapport à π).

Si la représentation π est irréductible alors la fonction ψ est indécomposable.

Ce résultat sera démontré à la section 2.1. Il y un lien assez étroit entre fonctions conditionnellement de type négatif et les fonctions de type positif sur G donné par le théorème de Schönberg : la fonction $\psi : G \to \mathbb{R}$ est conditionnellement de type négatif si et seulement si la fonction $e^{-t\psi}$ est de type positif sur G pour tout $t \geq 0$ (voir [HV89], chapitre 5, théorème 16). On sait que si G est un groupe localement compact, il existe une caractérisation intégrale des fonctions de type positif sur G (voir [Dix96], proposition 13.4.4). Il est intéressant, dans ce contexte, d'introduire la notion de mesure de type positif sur G (voir [Dix96], §13.7). A la section 2.2, nous faisons de même dans le cadre des fonctions conditionnellement de type négatif. Rappelons qu'une mesure de Radon sur un espace localement compact est une mesure borélienne, finie sur les compacts et intérieurement régulière.

Définition 1 *Soit G un groupe localement compact, de mesure de Haar (à gauche) dx, et de fonction modulaire Δ. Notons $C_c(G)$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles et à support compact sur G. Une mesure de Radon μ sur G est* conditionnellement de type négatif *si*

(i) pour tout $f \in C_c(G)$: $\int_G f(x)d\mu(x) = \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})d\mu(x)$ et

(ii) pour tout $h \in C_c(G)$ avec $\int_G h(x)dx = 0$:

$$\int_G \int_G h(x)h(xy)dxd\mu(y) \leq 0.$$

Ceci nous permet de démontrer

Théorème 2

Soit G un groupe localement compact. Soit μ mesure de Radon sur G, absolument continue par rapport à la mesure de Haar dx. On a les équivalences :

(i) La dérivée de Radon-Nikodym $\frac{d\mu}{dx}$ est presque partout égale (par rapport à dx) à une fonction conditionnellement de type négatif;

(ii) μ est une mesure conditionnellement de type négatif.

A la section 3, nous utilisons ce résultat pour démontrer

Théorème 3
Soit G un groupe localement compact compactement engendré. Le cône fermé (pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G) engendré par les fonctions conditionnellement de type négatif normalisées indécomposables, est le cône $CL(G)$.

Pour expliquer comment nous appliquons ce résultat, nous introduisons davantage de formalisme cohomologique. Soit π une représentation orthogonale ou unitaire du groupe topologique G. On note $Z^1(G,\pi)$ l'espace des 1-cocycles de G par rapport à π. Un cocycle $b \in Z^1(G,\pi)$ est un *1-cobord* s'il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ tel que $b(g) = \pi(g)\xi - \xi$ pour tout $g \in G$. On note $B^1(G,\pi)$ l'espace des 1-cobords, et

$$H^1(G,\pi) = Z^1(G,\pi)/B^1(G,\pi)$$

le *premier groupe de cohomologie* de G à coefficients dans π. Munissons $Z^1(G,\pi)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G, et notons $\overline{B^1}(G,\pi)$ l'adhérence de $B^1(G,\pi)$ dans $Z^1(G,\pi)$. On note

$$\overline{H^1}(G,\pi) = Z^1(G,\pi)/\overline{B^1}(G,\pi)$$

le *premier groupe de cohomologie réduite* de G à coefficients dans π.

Les sections 4 et 5 sont destinées à montrer

Théorème 4
Soit G un groupe localement compact et compactement engendré. Si on a $\overline{H^1}(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire irréductible π du groupe G, alors $\overline{H^1}(G,\rho) = 0$ pour toute représentation unitaire ρ du groupe G.

Par un argument d'intégrale directe, A. Guichardet a démontré (voir [Gui72], Proposition 4 ou [Gui80], Ch 3, §2) le même résultat en supposant G séparable (mais pas nécessairement compactement engendré).

Notre dernière application concerne la propriété (T) de Kazhdan. Le théorème de Delorme-Guichardet (voir [HV89], chapitre 4, théorème 7) affirme que, pour un groupe G localement compact σ-compact, la propriété (T) est équivalente à l'annulation de $H^1(G,\pi)$ pour toute représentation unitaire π de G. Dans [VK84], Vershik et Karpushev ont demandé si, pour un groupe localement compact compactement engendré, la propriété (T) est équivalente à l'annulation de $H^1(G,\sigma)$ pour toute représentation unitaire *irréductible* σ de G. (Des exemples simples montrent que l'hypothèse de génération compacte est nécessaire – voir [VK84], exemple 1.5.1). Y. Shalom a donné une réponse affirmative à cette question en démontrant (voir [Sha00], théorème 0.2)

Corollaire 1 *Pour G localement compact compactement engendré, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *G a la propriété (T);*

(ii) *$H^1(G,\pi)=0$ pour toute représentation unitaire irréductible π de G;*

(iii) *$\overline{H^1}(G,\pi)=0$ pour toute représentation unitaire irréductible π de G;*

(iv) *$\overline{H^1}(G,\pi)=0$ pour toute représentation unitaire π de G.*

Dans l'énoncé original, Y. Shalom suppose le groupe G séparable en plus de compactement engendré : pour la preuve de *(iii)⇒(iv)*, il fait en effet appel au résultat de Guichardet cité plus haut. Notre théorème 4 permet de s'affranchir de l'hypothèse de séparabilité dans le résultat de Shalom.

Notons que Vershik et Karpushev [VK84] ont montré que toute représentation irréductible π de G avec $H^1(G,\pi)\neq 0$ est non-séparée de la représentation triviale dans le dual $\widehat{G}$. (Voir l'article [Lou01] du premier auteur, pour des compléments et des généralisations de ce résultat.)

2 Fonctions et mesures conditionnellement de type négatif

2.1 Fonctions conditionnellement de type négatif

Le but de cette section est de démontrer le théorème 1, mentionné dans l'introduction.

Lemme 1 *Soit π une représentation orthogonale irréductible d'espace $\mathcal{H}$. Si A est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, commutant avec $\pi(g)$ pour tout $g\in G$ alors $A=\lambda\cdot Id_{\mathcal{H}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.*

Preuve du lemme 1 voir le premier pas de la preuve du Théorème 1 dans [SV02].

Lemme 2 *Soient π une représentation orthogonale d'espace $\mathcal{H}$ et un cocycle $b \in Z^1(G,\pi)$ d'image totale dans $\mathcal{H}$. Si A est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, commutant avec $\pi(g)$ pour tout $g \in G$ et tel que $\left\langle Ab(g) \,\middle|\, b(g) \right\rangle = 0 \ \forall g \in G$, alors $A = 0$.*

Preuve du lemme 2 Pour tous $g, h \in G$

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle Ab(g^{-1}h) \,\middle|\, b(g^{-1}h) \right\rangle \\
&= \left\langle A\big(\pi(g^{-1})b(h) + b(g^{-1})\big) \,\middle|\, \pi(g^{-1})b(h) + b(g^{-1}) \right\rangle \\
&= \left\langle A\pi(g^{-1})b(h) \,\middle|\, \pi(g^{-1})b(h) \right\rangle + \left\langle A\pi(g^{-1})b(h) \,\middle|\, b(g^{-1}) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle Ab(g^{-1}) \,\middle|\, \pi(g^{-1})b(h) \right\rangle + \left\langle Ab(g^{-1}) \,\middle|\, b(g^{-1}) \right\rangle \\
&= \left\langle Ab(h) \,\middle|\, b(h) \right\rangle + \left\langle A\pi(g^{-1})b(h) \,\middle|\, b(g^{-1}) \right\rangle \\
&\quad + \left\langle b(g^{-1}) \,\middle|\, A^*\pi(g^{-1})b(h) \right\rangle + \left\langle Ab(g^{-1}) \,\middle|\, b(g^{-1}) \right\rangle \\
&= \left\langle A\pi(g^{-1})b(h) \,\middle|\, b(g^{-1}) \right\rangle + \left\langle b(g^{-1}) \,\middle|\, A\pi(g^{-1})b(h) \right\rangle \\
&= 2\left\langle \pi(g^{-1})Ab(h) \,\middle|\, b(g^{-1}) \right\rangle = 2\left\langle Ab(h) \,\middle|\, \pi(g)b(g^{-1}) \right\rangle \\
&= -2\left\langle Ab(h) \,\middle|\, b(g) \right\rangle
\end{aligned}$$

Comme les $b(g)$ ($g \in G$) engendrent un sous-espace dense dans $\mathcal{H}$, on en tire d'abord $Ab(h) = 0$ pour tout $h \in G$, puis $A = 0$. □

Preuve du théorème 1

(i) Soit $\mathcal{K}$ un sous-espace fermé invariant de $\mathcal{H}_\psi$. Notons E le projecteur orthogonal sur $\mathcal{K}$. Il s'agit de montrer que $E = 0$ ou $E = 1$. Comme $E\pi_\psi(g) = \pi_\psi(g)E$, on peut poser

$$\begin{aligned}
b^+(g) &= E(b_\psi(g)) \\
b^-(g) &= (1-E)(b_\psi(g))
\end{aligned}$$

et $b^+, b^- \in Z^1(G, \pi_\psi)$. Les fonctions $\psi^\pm(g) = \|b^\pm(g)\|^2$ sont conditionnellement de type négatif normalisées et par le théorème de Pythagore, $\psi = \psi^+ + \psi^-$. Comme ψ est sur une génératrice extrémale, on a $\psi^+ = \lambda\psi$ avec $\lambda \geqslant 0$. Alors, $\forall g \in G$

$$\begin{aligned} \left\langle Eb_\psi(g) \,\middle|\, b_\psi(g) \right\rangle &= \left\langle Eb_\psi(g) \,\middle|\, Eb_\psi(g) \right\rangle \\ &= \psi^+(g) = \lambda\psi(g) = \left\langle \lambda b_\psi(g) \,\middle|\, b_\psi(g) \right\rangle \end{aligned}$$

Donc $\left\langle (E-\lambda) b_\psi(g) \,\middle|\, b_\psi(g) \right\rangle = 0 \ \forall g \in G$. Par le lemme 2, on conclut que $E = \lambda \cdot \mathrm{id}$ et comme $E^2 = E$, on a $E = 0$ ou $E = 1$.

(ii) Soient π une représentation irréductible d'espace $\mathcal{H}$, $b \in Z^1(G, \pi)$ et $\psi = \|b(.)\|^2$. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$\psi(x^{-1}y) = \left\langle b(x^{-1}y) \,\middle|\, b(x^{-1}y) \right\rangle = \|b(x)\|^2 + \|b(y)\|^2 - 2\left\langle b(x) \,\middle|\, b(y) \right\rangle$$

et donc

$$\begin{aligned} \left\langle b(x) \,\middle|\, b(y) \right\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|b(x)\|^2 + \|b(y)\|^2 - \psi(x^{-1}y)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\psi(x) + \psi(y) - \psi(x^{-1}y)\right). \end{aligned}$$

Supposons que ψ s'écrive

$$\psi = t\psi_1 + (1-t)\psi_2$$

où ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions conditionnellement de type négatif normalisées et $t \in]0,1[$. Notons $(\mathcal{H}_1, \pi_1, b_1)$ (resp. $(\mathcal{H}_2, \pi_2, b_2)$) le triple GNS associé à π_1 (resp. π_2).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $g_1, \ldots, g_n \in G$, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \, b(g_i) \right\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left\langle b(g_i) \;\middle|\; b(g_j) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left(\psi(g_i) + \psi(g_j) - \psi(g_i^{-1} g_j) \right) \\
&= \frac{t}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left(\psi_1(g_i) + \psi_1(g_j) - \psi_1(g_i^{-1} g_j) \right) \\
&\quad + \frac{(1-t)}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \left(\psi_2(g_i) + \psi_2(g_j) - \psi_2(g_i^{-1} g_j) \right) \\
&= t \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_1(g_i) \right\|^2 + (1-t) \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_2(g_i) \right\|^2 .
\end{aligned}$$

Sur le sous-espace dense $\mathcal{V}$ de $\mathcal{H}$ formé des combinaisons linéaires finies d'images du cocycle b, on définit les applications

$$\begin{aligned}
& T_1 : \sum_{i=1}^{n} a_i \, b(g_i) \longmapsto \sqrt{t} \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_1(g_i) \in \mathcal{H}_1 \\
\text{et} \qquad & T_2 : \sum_{i=1}^{n} a_i \, b(g_i) \longmapsto \sqrt{1-t} \sum_{i=1}^{n} a_i \, b_2(g_i) \in \mathcal{H}_2 .
\end{aligned}$$

Le calcul ci-dessus montre d'abord que T_1 et T_2 sont bien définies, ensuite que

$$\|T_1 \xi\|^2 + \|T_2 \xi\|^2 = \|\xi\|^2 \tag{1}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{V}$. Cela implique que les applications T_1 et T_2 s'étendent en des opérateurs continus

$$T_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1 \qquad \text{et} \qquad T_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_2$$

qui vérifient l'égalité (1) pour tout $\xi \in \mathcal{H}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $g_1, \ldots, g_n \in G$, on a

$$\begin{aligned}
T_1\left(\pi(g)\left(\sum_{i=1}^n a_i b(g_i)\right)\right) &= T_1\left(\sum_{i=1}^n a_i\left(b(gg_i)-b(g)\right)\right) \\
&= \sqrt{t}\sum_{i=1}^n a_i\left(b_1(gg_i)-b_1(g)\right) \\
&= \sqrt{t}\sum_{i=1}^n a_i\pi_1(g)b_1(g_i) \\
&= \pi_1(g)\left(T_1\left(\sum_{i=1}^n a_i b(g_i)\right)\right)
\end{aligned}$$

pour tout $g \in G$. Ceci montre que l'opérateur T_1 entrelace les représentations π et π_1. On montre de même que l'opérateur T_2 entrelace les représentations π et π_2. On en déduit que les opérateurs auto-adjoints $T_1^t T_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ et $T_2^t T_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ commutent avec la représentation *irréductible* π. Le lemme 1 implique qu'il existe des réels λ_1 et λ_2 tels que

$$T_1^t T_1 = \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \qquad \text{et} \qquad T_2^t T_2 = \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathcal{H}}.$$

Comme les opérateurs $T_1^t T_1$ et $T_2^t T_2$ sont positifs, les réels λ_1 et λ_2 sont positifs et (1) implique $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

On a alors pour tout $g \in G$

$$\begin{aligned}
\psi_1(g) = \|b_1(g)\|^2 &= \frac{1}{t}\left\|\sqrt{t}b_1(g)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{t}\|T_1 b(g)\|^2 \\
&= \frac{1}{t}\left\langle T_1 b(g) \,\middle|\, T_1 b(g)\right\rangle \\
&= \frac{1}{t}\left\langle T_1^t T_1 b(g) \,\middle|\, b(g)\right\rangle \\
&= \frac{1}{t}\left\langle \lambda_1 b(g) \,\middle|\, b(g)\right\rangle \\
&= \frac{\lambda_1}{t}\left\langle b(g) \,\middle|\, b(g)\right\rangle \\
&= \frac{\lambda_1}{t}\|b(g)\|^2 = \frac{\lambda_1}{t}\psi(g).
\end{aligned}$$

Un calcul similaire pour ψ_2 montre que

$$\psi_1 = \frac{\lambda_1}{t}\psi \qquad \text{et} \qquad \psi_2 = \frac{\lambda_2}{1-t}\psi$$

où $\frac{\lambda_1}{t}$ et $\frac{\lambda_2}{1-t}$ sont deux réels positifs ou nuls.

$\square$

2.2 Mesures conditionnellement de type négatif

Pour une fonction f à valeurs *réelles* sur G, et $s \in G$, on note

$$f^* : G \longrightarrow \mathbb{R} \,; t \longmapsto f(t^{-1})\Delta(t^{-1})$$

et

$$_sf : G \longrightarrow \mathbb{R} \,; t \longmapsto f(st).$$

Pour des fonctions intégrables $f, g : G \longrightarrow \mathbb{R}$, on note

$$f * g : G \longrightarrow \mathbb{R} \,; t \longmapsto (f * g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-1}t)\,\mathrm{d}s$$

le produit de convolution de f et g.

On note $C_c(G)$ l'ensemble des fonctions continues sur G, à support compact et à valeurs réelles. Pour $k \in \mathbb{R}$, on note

$$C_{c,k}(G) = \left\{ f \in C_c(G) : \int_G f(x)\mathrm{d}x = k \right\}.$$

Définition 2 *Soit μ une mesure de Radon sur G. On dit que μ est* conditionnellement de type négatif *si*

(a) $\forall f \in C_c(G) \; : \; \mu(f^*) = \mu(f)$

(b) $\forall f \in C_{c,0}(G) \; : \; \mu(f^* * f) \leqslant 0$

Cette définition est clairement équivalente à la définition donnée dans l'introduction. La suite de cette section est consacrée à la preuve du théorème 2 de l'introduction.

Rappelons qu'une *approximation de l'identité de* $C_c(G)$ est une suite généralisée de fonctions $(f_i)_{i\in I}$ dans $C_{c,1}(G)$ prenant des valeurs positives ou nulles, vérifiant $f_i^* = f_i$ et telles que $\mathrm{supp}(f_i) \searrow \{e\}$ pour $i \to \infty$. Pour une telle suite généralisée, on a

$$\lim_{i\to\infty} f_i * h = h \qquad \text{et} \qquad \lim_{i\to\infty} h * f_i = h$$

uniformément sur les compacts pour toute fonction $h \in C_c(G)$.

Preuve du théorème 2

(i)⇒(ii) Notons $m(A)$ la mesure de Haar d'une partie A de G et posons $\psi = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$. On peut supposer que ψ est une fonction conditionnellement de type négatif. Commençons par montrer (a) : pour $f \in C_c(G)$, on a :

$$\begin{aligned} \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\mathrm{d}\mu(x) &= \int_G f(x^{-1})\Delta(x^{-1})\psi(x^{-1})\mathrm{d}x \\ &= \int_G f(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_G f(x)\mathrm{d}\mu(x) \end{aligned}$$

Pour (b), prenons $f \in C_{c,0}(G)$ et montrons que :

$$\int_G \int_G f(x)f(y)\psi(x^{-1}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 0$$

La partie $K = \mathrm{supp}(f)$ est un compact de G. Notons $\|.\|_K$ la norme uniforme d'une fonction sur K. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$. Il existe une fonction étagée mesurable $h : K \to \mathbb{R}$ telle que $\|f-h\|_K < \varepsilon$.

Posons

$$\begin{array}{rccl} h_n : & G & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} h(x) - \dfrac{1}{m(K)}\displaystyle\int_K h(y)\mathrm{d}y & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

On a $\int_G h_n(x)\mathrm{d}x = 0$ d'une part et

$$\int_K h(y)\mathrm{d}y = \int_K h(y)\mathrm{d}y - \int_K f(y)\mathrm{d}y = \int_K \big(h(y) - f(y)\big)\mathrm{d}y$$

d'autre part, donc

$$\left|\int_K h(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_K |h(y) - f(y)|\mathrm{d}y \leqslant \varepsilon\, m(K).$$

Par suite

$$\|h - h_n\|_K = \frac{1}{m(K)}\left|\int_K h(y)\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{1}{m(K)}\,\varepsilon\, m(K) = \varepsilon.$$

Donc, on a $\|f - h_n\|_K < 2\varepsilon$, et même $\|f - h_n\|_G < 2\varepsilon$ puisque $f(x) = 0 = h_n(x)$ pour $x \notin K$.

On peut écrire $h_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{V_i}$ où les V_i sont des boréliens qui partitionnent K. Comme K est compact et ψ est uniformément continue sur K, on peut supposer que :

$$\forall x, x' \in V_i \ ; \ \forall y, y' \in V_j \ : \ \left|\psi(x^{-1}y) - \psi\big((x')^{-1}y'\big)\right| < \varepsilon.$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i m(V_i) = \int_G h_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Choisissons $g_i \in V_i$ pour tout $i \in I$. Comme la fonction ψ est conditionnellement de type négatif, on a

$$\begin{aligned}
&\int_G \int_G h_n(x)h_n(y)\psi(x^{-1}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i\alpha_j \int_{V_i}\int_{V_j} \psi(x^{-1}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad = \sum_{i,j=1}^k \alpha_i\alpha_j \int_{V_i}\int_{V_j} \big(\psi(x^{-1}y) - \psi(g_i^{-1}g_j)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad\qquad + \sum_{i,j=1}^k \alpha_i m(V_i)\alpha_j m(V_j)\psi(g_i^{-1}g_j) \\
&\qquad \leqslant \sum_{i,j=1}^k |\alpha_i||\alpha_j| \int_{V_i}\int_{V_j} \big|\psi(x^{-1}y) - \psi(g_i^{-1}g_j)\big|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\qquad \leqslant \varepsilon \sum_{i,j=1}^k |\alpha_i||\alpha_j| m(V_i)m(V_j) \\
&\qquad = \varepsilon \left\|h_n\right\|_K^2 m(K)^2.
\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a ainsi montré que $\|f - h_n\|_G < \frac{2}{n}$ et

$$\int_G \int_G h_n(x)h_n(y)\psi(x^{-1}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{n} \left\|h_n\right\|_G^2 m(K)^2.$$

En faisant varier n, on obtient une suite $(h_n)_n$ qui converge uniformément sur G. Par conséquent, la suite $\left(\|h_n\|_G^2\right)_n$ est bornée, disons par M. Donc

$$\int_G \int_G f(x)f(y)\psi(x^{-1}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{M\, m(K)^2}{n} = 0.$$

(ii)⇒(i)

Premier pas (construction GNS) Soit $\mathcal{H}_\mu^0$ l'espace de Hilbert réel obtenu en séparant et complétant $C_{c,0}(G)$ pour la forme bilinéaire

$$\left\langle f \;\middle|\; g \right\rangle_\mu = -\int_G \int_G f(x)g(xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mu(y) = -\mu(f^* * g)\ .$$

Soit $\mathcal{H}_\mu$ l'espace de Hilbert affine obtenu en séparant et complétant $C_{c,1}(G)$ pour l'écart

$$\|f-g\|_\mu^2 = \left\langle f-g \;\middle|\; f-g \right\rangle_\mu .$$

On voit que $\mathcal{H}_\mu^0$ est l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{H}_\mu$.

On peut définir une action affine de G sur $\mathcal{H}_\mu$ par $\big(\alpha(s)f\big)(x) = f(s^{-1}x)$. Sa partie linéaire est la représentation *régulière gauche* de G dans $\mathcal{H}_\mu^0$. Il est clair que α est isométrique. Pour montrer que α est une action affine, il reste à voir que l'application $G \times \mathcal{H}_\mu \to \mathcal{H}_\mu$; $(s,f) \mapsto \alpha(s)f$ est continue. Notons qu'on peut se restreindre à la partie dense $G \times C_{c,1}(G)$

Soit $\big((s_i, f_i)\big)_{i\in I}$ une suite généralisée dans $G \times C_{c,1}(G)$ qui converge vers $(s,f) \in G \times C_{c,1}(G)$. On a

$$\begin{aligned}
\|\alpha(s)f - \alpha(s_i)f_i\| &\leqslant \|\alpha(s)f - \alpha(s_i)f\| + \|\alpha(s_i)f - \alpha(s_i)f_i\| \\
&= \|\alpha(s)f - \alpha(s_i)f\| + \|f - f_i\|
\end{aligned}$$

On a bien sûr $\|f - f_i\| \to 0$ quand $i \to \infty$ et si on pose $t_i = s^{-1}s_i$,

$$\begin{aligned}
&\|\alpha(s_i)f - \alpha(s)f\|^2 = \|\alpha(t_i)f - f\|^2 \\
&\quad = -\int_G \int_G \big(\alpha(t_i)f - f\big)(x)\big(\alpha(t_i)f - f\big)(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(y) \\
&\quad = -\int_G \int_G \big(f(t_i^{-1}x) - f(x)\big)\big(f(t_i^{-1}xy) - f(xy)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}\mu(y)
\end{aligned}$$

Mais, lorsque $i \to \infty$, on a $t_i \to e$ dans G, donc $|f(t_i^{-1}xy) - f(xy)| \to 0$ uniformément sur les compacts de $G \times G$, et donc $\|\alpha(s)f - \alpha(s_i)f\| \to 0$. Ainsi $\alpha(s_i)f_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \alpha(s)f$, ce qui montre que α est une action affine.

Deuxième pas (convergence faible) Montrons qu'on peut trouver une approximation de l'identité qui converge faiblement vers un point $\eta \in \mathcal{H}_\mu$, c'est-à-dire

$$\left\langle f_i - \eta \;\middle|\; \xi \right\rangle_\mu \to 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathcal{H}_\mu^0.$$

Soit W un voisinage compact de e. Posons

$$C = \sup \text{ess}\{|\psi(x)| \,:\, x \in W\}.$$

Choisissons alors un voisinage V de e tel que $V^2 \subset W$ et $V = V^{-1}$. Choisissons pour origine de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\mu$ une fonction $f_0 \in C_{c,1}(G)$ prenant des valeurs positives et telle que $\operatorname{supp} f_0 \subseteq V$. Considérons une approximation de l'identité $(f_i)_{i\in I}$ telle que $\operatorname{supp} f_i \subseteq V$ pour tout $i \in I$. La suite généralisée $\big(\|f_i - f_0\|_\mu\big)_i$ est alors bornée, en effet

$$\begin{aligned}
\|f_i - f_0\|^2 &= -\int_G \int_G (f_i - f_0)(x)(f_i - f_0)(y)\psi(x^{-1}y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_V \int_V |(f_i - f_0)(x)||(f_i - f_0)(y)||\psi(x^{-1}y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\leqslant C \int_V \int_V (f_i + f_0)(x)(f_i + f_0)(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= 4C
\end{aligned}$$

La dernière égalité a lieu car $\int_G f_k(x)\mathrm{d}x = 1\ \forall k \in I$.

La suite généralisée $(f_i - f_0)_i$ est donc contenue dans la boule de rayon $2\sqrt{C}$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^0_\mu$. Comme cette boule est compacte pour la topologie faible on peut extraire de $(f_i - f_0)_i$ une sous-suite généralisée convergeant faiblement vers un élément $\zeta \in \mathcal{H}^0_\mu$ i.e.

$$\Big\langle f_i - f_0 - \zeta \;\Big|\; \xi \Big\rangle_\mu \to 0 \qquad \text{pour tout} \qquad \xi \in \mathcal{H}^0_\mu.$$

En notant $\eta = f_0 + \zeta$ le translaté de f_0 par ζ on obtient la convergence faible de f_i vers η.

Troisième pas (calculs de cocycles) Posons $b_i(s) = \alpha(s)f_i - f_i$ pour $i \in I$ et $b(s) = \alpha(s)\eta - \eta$. On a $b_i, b \in Z^1(G, \lambda)$ où λ désigne la partie linéaire de α.

Nous allons montrer que, à une constante additive près, la fonction ψ est presque partout égale à la moitié du carré de la norme du cocycle (continu) b.

- Montrons que la suite généralisée $\left(\Big\langle b_i(s) - b(s) \;\Big|\; \xi \Big\rangle_\mu\right)_{i\in I}$ converge vers 0 uniformément sur les compacts de G pour tout $\xi \in \mathcal{H}^0_\mu$. (Ceci montre en particulier que pour tout $s \in G$ on a $b_i(s) \to b(s)$ faiblement.)

$$\begin{aligned}
\left\langle b_i(s) - b(s) \;\middle|\; \xi \right\rangle_\mu &= \left\langle \alpha(s)f_i - f_i - (\alpha(s)\eta - \eta) \;\middle|\; \xi \right\rangle_\mu \\
&= \left\langle \alpha(s)f_i - \alpha(s)\eta \;\middle|\; \xi \right\rangle_\mu - \left\langle f_i - \eta \;\middle|\; \xi \right\rangle_\mu \\
&= \left\langle f_i - \eta \;\middle|\; \lambda(s^{-1})\xi \right\rangle_\mu - \left\langle f_i - \eta \;\middle|\; \xi \right\rangle_\mu \\
&= \left\langle f_i - \eta \;\middle|\; \lambda(s^{-1})\xi - \xi \right\rangle_\mu \qquad (2)
\end{aligned}$$

Fixons K un compact de G. L'ensemble $L = \{\lambda(s^{-1})\xi - \xi : s \in K\}$ est compact dans $\mathcal{H}^0_\mu$ pour la topologie normique. Comme on a montré au deuxième pas que $f_i - \eta \to 0$ faiblement dans $\mathcal{H}^0_\mu$, le lemme suivant et (2) concluent la preuve de notre assertion.

Lemme 3 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel et $(x_i)_{i\in I}$ une suite généralisée d'éléments de $\mathcal{H}$ telle que $x_i \to 0$ faiblement. Alors la suite généralisée de fonctions*

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}\;;\; y \longmapsto \left\langle x_i \;\middle|\; y \right\rangle$$

converge vers 0 uniformément sur les parties normiquement compactes de $\mathcal{H}$.

La preuve de ce lemme est facile et laissée au lecteur.

- Montrons que, pour tout $s \in G$, on a

$$\left\langle b(s) \;\middle|\; b_i(s) \right\rangle_\mu = \int_G \left(f_i(sy) + f_i(s^{-1}y) - 2f_i(y) \right) \, \mathrm{d}\mu(y). \qquad (3)$$

Pour $g \in C_{c,0}(G)$, on a

$$\begin{aligned}
\left\langle b_i(s) \;\middle|\; g \right\rangle_\mu &= -\int_G \int_G \big(\alpha(s)f_i - f_i\big)(x) g(xy)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G f_i(x) g(xy)\, \mathrm{d}x - \int_G f_i(s^{-1}x) g(xy)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G f_i(x) g(xy)\, \mathrm{d}x - \int_G f_i(x) g(sxy)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_G \left(\int_G f_i(x^{-1}) g(x^{-1}y) \Delta(x^{-1}) \mathrm{d}x \right. \\
&\qquad \left. - \int_G f_i(x^{-1}) g(sx^{-1}y) \Delta(x^{-1}) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\mu(y). \\
&= \int_G \left((f_i^* * g)(y) - (f_i^* * {}_s g)(y) \right) \mathrm{d}\mu(y). \\
&= \int_G \left((f_i * g)(y) - (f_i * {}_s g)(y) \right) \mathrm{d}\mu(y).
\end{aligned}$$

Comme la suite généralisée $(f_i)_i$ est une approximation de l'identité, en prenant la limite pour $i \to \infty$, on obtient

$$\left\langle b(s) \;\middle|\; g \right\rangle_\mu = \lim_{i \to \infty} \left\langle b_i(s) \;\middle|\; g \right\rangle_\mu = \int_G (g(y) - g(sy))\, \mathrm{d}\mu(y) \qquad (4)$$

pour tout $s \in G$. Par conséquent, comme $b_i(s) \in C_{c,0}(G)$ pour tous $i \in I$ et $s \in G$, il vient :

$$\begin{aligned}
\left\langle b(s) \;\middle|\; b_i(s) \right\rangle_\mu &= \int_G \left\{ \big(\alpha(s)f_i - f_i\big)(y) - \big(\alpha(s)f_i - f_i\big)(sy) \right\} \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_G \big(f_i(sy) + f_i(s^{-1}y) - 2f_i(y) \big)\, \mathrm{d}\mu(y).
\end{aligned}$$

- Considérons une fonction $F \in C_c(G)$. On a

$$\begin{aligned}
\int_G F(s) \|b(s)\|_\mu^2 \mathrm{d}s &= \int_G F(s) \lim_{i \to \infty} \left\langle b(s) \;\middle|\; b_i(s) \right\rangle_\mu \mathrm{d}s \\
&= \lim_{i \to \infty} \int_G F(s) \left\langle b(s) \;\middle|\; b_i(s) \right\rangle_\mu \mathrm{d}s. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Grâce à (3), on a

$$\begin{aligned}
\int_G F(s) \left\langle b(s) \,\middle|\, b_i(s) \right\rangle_\mu \mathrm{d}s
&= \int_G F(s) \int_G \big(f_i(sy) + f_i(s^{-1}y) - 2f_i(y)\big)\, \mathrm{d}\mu(y)\, \mathrm{d}s \\
&= \int_G \left(\int_G F(s) f_i(sy)\, \mathrm{d}s + \int_G F(s) f_i(s^{-1}y)\, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\mu(y) \\
&\qquad -2 \int_G \int_G F(s) f_i(y)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\mu(y) \\
&= \int_G \big((F^* * f_i)(y) + (F * f_i)(y)\big) \mathrm{d}\mu(y) \qquad (6) \\
&\qquad -2 \int_G F(s)\, \mathrm{d}s \int_G f_i(y)\, \mathrm{d}\mu(y).
\end{aligned}$$

La suite généralisée $(f_i)_i$ est une approximation de l'identité. Comme ψ est bornée sur W, cela implique que la suite généralisée

$$\Big(\int_G f_i(y) \mathrm{d}\mu(y) \Big)_i = \Big(\int_{\mathrm{supp}(f_i)} f_i(y) \psi(y) \mathrm{d}y \Big)_i$$

est bornée. Quitte à passer à une sous-suite généralisée, on peut donc supposer qu'elle converge, disons vers $k \in \mathbb{R}$. D'autre part, les suites $(F * f_i)$ et $(F^* * f_i)$ convergent uniformément sur tout compact vers F et F^* respectivement. En passant à la limite sous le signe intégral dans (6) et en comparant avec (5), on obtient finalement

$$\int_G F(s) \|b(s)\|_\mu^2 \mathrm{d}s \;=\; \int_G (F^*(y) + F(y))\, \mathrm{d}\mu(y) - 2\,k \Big(\int_G F(s)\, \mathrm{d}s \Big).$$

Comme μ est une mesure conditionnellement de type négatif, on a aussi

$$\int_G F(s) \|b(s)\|_\mu^2 \mathrm{d}s \;=\; 2 \int_G F(y) \mathrm{d}\mu(y) - 2\,k \Big(\int_G F(s)\, \mathrm{d}s \Big).$$

Ainsi, pour toute fonction $F \in C_c(G)$ on a

$$\int_G 2F(y)\psi(y)\, \mathrm{d}y = \int_G F(s) \big(\|b(s)\|_\mu^2 + 2k \big)\, \mathrm{d}s$$

Par conséquent,

$$\psi(s) = \frac{1}{2} \|b(s)\|^2 + k \qquad \text{p.p.}$$

Comme le membre de droite est une fonction continue, il s'ensuit que ψ est p.p. égale à une fonction continue. De plus, comme d'une part la fonction $s \mapsto \|b(s)\|^2$ est conditionnellement de type négatif, et que d'autre part les constantes sont trivialement conditionnellement de type négatif, il s'ensuit que ψ est conditionnellement de type négatif.

3 Le cône des fonctions conditionnellement de type négatif

Pour cette section, soit G un groupe localement compact, compactement engendré par une partie Q (qu'on peut supposer voisinage du neutre et symétrique). Le Théorème 3 serait une conséquence simple du théorème de Krein-Milman si le cône $CL(G)$ était à base compacte. Ce n'est malheureusement pas le cas.

Les idées de notre preuve, à laquelle cette section est dévolue, proviennent essentiellement de la section 3 de [VK84]. On commence par donner une idée générale de la démonstration, avant les preuves des résultats partiels.

On considère d'abord un cône plus grand, le cône $\widetilde{CL}(G)$ de toute les fonctions conditionnellement de type négatif et la partie

$$C_0 = \left\{\psi \in \widetilde{CL}(G) \ : \ \psi(e) \geqslant 0 \text{ et } \int_{Q^2} \psi(x)\mathrm{d}x = 1\right\}$$

où $\mathrm{d}x$ désigne la mesure de Haar sur G telle que la mesure de Q^2 soit 1.

On remarque que C_0 est convexe. Par ailleurs, toute fonction $\psi \in CL(G)$ non nulle possède un multiple positif dans C_0. Dans ce sens, la partie $C_0 \cap CL(G)$ est une base du cône $CL(G)$.

On construit comme au lemme 3 de [VK84] une fonction majorant la partie C_0. Plus précisément, on a

Proposition 1 *Il existe une fonction $f_0 : G \longrightarrow]1, +\infty[$ mesurable, bornée sur les compacts de G et telle que $\psi(g) \leqslant f_0(g)$ pour tous $g \in G$, $\psi \in C_0$.*

On peut alors définir les espaces

$$\begin{aligned} L^1_{f_0}(G) &= \left\{f : G \to \mathbb{R} : \int_G |f(g)f_0(g)|\mathrm{d}g < +\infty\right\}; \\ L^\infty_{f_0}(G) &= \left\{h : G \to \mathbb{R} : \sup \operatorname{ess}|\frac{h}{f_0}| < +\infty\right\}. \end{aligned}$$

Munis des normes

$$\|f\|_{1,f_0} = \int_G |f(g)f_0(g)|\mathrm{d}g \qquad \text{et} \qquad \|h\|_{\infty,f_0} = \text{sup ess}|\frac{h}{f_0}|$$

ces espaces sont isométriquement isomorphes à $L^1(G)$ et $L^\infty(G)$ respectivement. La proposition 1 montre que C_0 est inclus dans la boule unité fermée de $L^\infty_{f_0}(G)$. Comme C_0 contient la base de $CL(G)$ et la fonction constante 1, on a $\widetilde{CL}(G) \subseteq L^\infty_{f_0}(G)$.

On peut munir $L^\infty_{f_0}(G)$ de la topologie faible-$*$ car c'est le dual de $L^1_{f_0}(G)$. Plus précisément, on a un isomorphisme isométrique

$$T : L^\infty_{f_0}(G) \longrightarrow L^1_{f_0}(G)^* \ ; \ h \longmapsto T_h$$

donné par :

$$T_h(f) = \int_G h(g)f(g)\mathrm{d}g \ \ \big(h \in L^\infty_{f_0}(G), f \in L^1_{f_0}(G)\big) \ .$$

L'intérêt de la topologie faible-$*$ pour nos travaux réside dans la proposition suivante, donnée sans preuve dans [VK84].

Proposition 2 *La partie C_0 est compacte pour la topologie faible-$*$.*

L'étude de l'enveloppe convexe fermée des fonctions indécomposables s'avère pour certains aspects plus facile avec la topologie faible-$*$ qu'avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. On a

Proposition 3 *Toute fonction $\psi \in C_0 \cap CL(G)$ est dans l'enveloppe convexe fermée (pour la topologie faible-$*$) des fonctions conditionnellement de type négatif normalisées indécomposables.*

Cette proposition sera démontrée à l'aide du théorème de Krein-Milman. D'autre part Vershik et Karpushev ont démontré (voir [VK84], proposition 11) :

Proposition 4 *Sur $C_0 \cap CL(G)$, la topologie faible-$*$ coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.*

En admettant ces résultats, on peut maintenant démontrer le théorème 3. Les preuves des propositions seront données immédiatement après.

Preuve du théorème 3 Soit C le cône fermé (pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts) engendré par les fonctions conditionnellement de type négatif normalisées indécomposables. Comme le cône $CL(G)$ est clairement fermé pour cette topologie on a déjà $C \subseteq CL(G)$. Pour montrer l'inclusion inverse, on prend $\psi \in CL(G)$. Quitte à remplacer ψ par $\lambda\psi$ ($\lambda > 0$), on peut supposer que $\psi \in C_0 \cap CL(G)$. Le résultat découle immédiatement des propositions 3 et 4. $\square$

Preuve de la proposition 1 (En suivant la proposition 8 et le lemme 3 de [VK84]) On commence par montrer que pour toute $\psi \in CL(G)$ et pour tous $g, h \in G$ on a

$$\psi(hg) + \psi(g^{-1}h) + 2\psi(h) \geqslant \psi(g) \tag{7}$$

Pour ce faire, considérons $(\mathcal{H}, \pi, b)$ le triple GNS associé à ψ et $\xi \in \mathcal{H}$ défini par :

$$\xi = b(g) - b(h) - b(h^{-1}).$$

Pour tous $g, h \in G$, on a

$$\left\langle b(g) \;\middle|\; b(h) \right\rangle = -\frac{1}{2}(\psi(g^{-1}h) - \psi(g) - \psi(h))$$

et donc

$$0 \leqslant \left\langle \xi \;\middle|\; \xi \right\rangle = -\psi(g) + \psi(h^{-1}) + \psi(h) + \psi(g^{-1}h) + \psi(hg) - \psi(h^2)\ .$$

Comme $\psi(h^{-1}) = \psi(h)$ et $\psi(h^2) \geqslant 0$, il vient (7).

On va maintenant montrer que pour toute $\psi \in C_0 \cap CL(G)$, on a :

$$\psi(g) \leqslant \frac{3 + \sup_{g \in Q} \Delta(g)}{m(Q)} \quad \text{si} \quad g \in Q \tag{8}$$

$$\psi(g) \leqslant n^2 \frac{3 + \sup_{g \in Q} \Delta(g)}{m(Q)} \quad \text{si} \quad g \in Q^n \setminus Q^{n-1}\ (n \geqslant 2) \tag{9}$$

Remarquons pour commencer que $m(Q) > 0$ car Q est un voisinage du neutre. Pour obtenir (8), on intègre l'inégalité (7) sur Q :

$$\begin{aligned} m(Q)\psi(g) &= \int_Q \psi(g)\mathrm{d}h \\ &\leqslant \int_Q \psi(hg)\mathrm{d}h + \int_Q \psi(g^{-1}h)\mathrm{d}h + 2\int_Q \psi(h)\mathrm{d}h \\ &= \Delta(g)\int_{Qg^{-1}} \psi(h)\mathrm{d}h + \int_{gQ} \psi(h)\mathrm{d}h + 2\int_Q \psi(h)\mathrm{d}h \\ &\leqslant (3+\Delta(g))\int_{Q^2} \psi(h)\mathrm{d}h = 3+\Delta(g) \end{aligned}$$

Donc

$$\psi(g) \leqslant \frac{3+\sup_{g\in Q}\Delta(g)}{m(Q)}.$$

Ensuite, (9) s'obtient à partir de (8) en utilisant la relation de cocycle sur b et l'inégalité triangulaire.

On définit

$$f_0 : G \longrightarrow]1,+\infty[$$

par

$$\begin{aligned} f_0(g) = 1 + \frac{3+\sup_{g\in Q}\Delta(g)}{m(Q)} \quad &\text{si} \quad g\in Q \\ f_0(g) = 1 + n^2\frac{3+\sup_{g\in Q}\Delta(g)}{m(Q)} \quad &\text{si} \quad g\in Q^n \setminus Q^{n-1} \quad (n\geqslant 2) \end{aligned}$$

Remarquons que $G = \bigcup_{n\geqslant 1} Q^n$, ce qui implique que f_0 est bien définie. Il est clair que f_0 est mesurable et bornée sur les compacts de G. Il reste à montrer que $\psi(g) \leqslant f_0(g)$ pour tous $g\in G$, $\psi\in C_0$.

Pour ce faire, on écrit $\psi = \psi_0 + \psi(e)$ où $\psi_0 \in C_0 \cap CL(G)$. Comme $0 \leqslant \psi(e) \leqslant 1$, (8) et (9) impliquent exactement ce qu'on veut. □

Preuve de la proposition 2 Commençons par montrer que pour la topologie faible-$*$, C_0 est fermé dans $L^\infty_{f_0}(G)$. Considérons une suite généralisée $(\psi_i)_{i\in I} \subseteq C_0$ qui converge vers une fonction $\psi \in L^\infty_{f_0}(G)$ pour la topologie faible-$*$. Définissons les mesures μ_i et μ par $\mathrm{d}\mu_i(x) = \psi_i(x)\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}\mu(x) = \psi(x)\mathrm{d}x$. Les fonctions ψ_i sont conditionnellement de type négatif. En particulier, elles sont continues, et donc essentiellement bornées sur les compacts de G. Par le théorème 2, les mesures μ_i sont conditionnellement de type négatif. Comme $C_c(G) \subset L^1_{f_0}(G)$, on a

$$\int_G f(g)\mathrm{d}\mu_i(g) \longrightarrow \int_G f(g)\mathrm{d}\mu(g) \qquad \text{pour} \qquad f \in C_c(G),$$

car $\psi_i \to \psi$ au sens de la topologie faible-$*$. La mesure μ est une mesure de Radon conditionnellement de type négatif. Par conséquent, par le théorème 2, ψ est une fonction conditionnellement de type négatif. Par ailleurs, la convergence faible-$*$ $\psi_i \to \psi$ implique que $\int_{Q^2} \psi(x)\mathrm{d}x = 1$. Ainsi, $\psi \in C_0$.

Pour terminer, la boule unité fermée de $L^\infty_{f_0}(G)$ est faible-$*$ compacte et contient C_0. Donc C_0 est faible-$*$ compacte. $\square$

Afin de simplifier la preuve de la proposition 3, on commence par énoncer un lemme qui décrit les points extrémaux de C_0.

Lemme 4 *Les points extrémaux de C_0 sont la fonction constante 1 et les points extrémaux de $C_0 \cap CL(G)$. De plus, les points extrémaux de $C_0 \cap CL(G)$ sont des fonctions indécomposables.*

Preuve du lemme 4 Remarquons tout d'abord que toute fonction $\psi \in C_0$ vérifie $0 \leqslant \psi(e) \leqslant 1$ et que si $\psi(e) = 1$, alors ψ est la fonction constante 1. On commence par montrer la première assertion par double inclusion.

Soit ψ un point extrémal de $C_0 \cap CL(G)$. Si $\psi = t\psi_1 + (1-t)\psi_2$ avec $t \in]0,1[$, $\psi_1, \psi_2 \in C_0$, alors $0 = \psi(e) = t\psi_1(e) + (1-t)\psi_2(e)$. Comme $\psi_i(e) \geqslant 0$, cela implique que $\psi_1(e) = 0 = \psi_2(e)$, i.e. $\psi_1, \psi_2 \in C_0 \cap CL(G)$. Par hypothèse, $\psi_1 = \psi = \psi_2$. On a montré que ψ est un point extrémal dans C_0. D'autre part, écrivons $1 = t\psi_1 + (1-t)\psi_2$ avec $t \in]0,1[$, $\psi_1, \psi_2 \in C_0$. On a que $\psi_1(e) \leqslant 1$ et $\psi_2(e) \leqslant 1$. Par conséquent $\psi_1(e) = 1$ et $\psi_2(e) = 1$, d'où $\psi_1 = 1 = \psi_2$. Donc 1 est un point extrémal dans C_0.

Pour montrer l'autre inclusion, considérons un point extrémal ψ dans C_0 et montrons que si ψ n'est pas normalisée, cela implique $\psi = 1$. Supposons donc $0 < \psi(e) \leqslant 1$. Il n'est pas possible que $0 < \psi(e) < 1$, car on pourrait écrire $\psi = \psi(e) \cdot 1 + \big(1 - \psi(e)\big)\big(\psi - \psi(e)\big)\big(1 - \psi(e)\big)^{-1}$. On constate que 1 et $\big(\psi - \psi(e)\big)\big(1 - \psi(e)\big)^{-1}$ sont dans C_0 et différentes de ψ. Ceci contredit le fait que ψ soit un point extrémal dans C_0. On doit donc avoir $\psi(e) = 1$, d'où $\psi = 1$.

Passons maintenant à la seconde assertion. Soit ψ un point extrémal dans

$C_0 \cap CL(G)$ et écrivons $\psi = t\psi_1 + (1-t)\psi_2$ avec $t \in]0,1[$, $\psi_1, \psi_2 \in CL(G)$. On veut montrer que $\psi_1 = \lambda_1 \psi$ et $\psi_2 = \lambda_2 \psi$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$.

Si $\psi_1 = 0$ ou $\psi_2 = 0$, c'est trivial. Dans le cas contraire, on peut poser $\chi_i = \left(\int_{Q^2} \psi_i(x)\mathrm{d}x\right)^{-1} \psi_i$, de sorte que $\chi_1, \chi_2 \in C_0 \cap CL(G)$ et :

$$\psi = t\left(\int_{Q^2} \psi_1(x)\mathrm{d}x\right)\chi_1 + (1-t)\left(\int_{Q^2} \psi_2(x)\mathrm{d}x\right)\chi_2$$

Or, par ailleurs :

$$t\int_{Q^2} \psi_1(x)\mathrm{d}x + (1-t)\int_{Q^2} \psi_2(x)\mathrm{d}x = \int_{Q^2} \psi(x)\mathrm{d}x = 1$$

Donc, on a écrit ψ comme combinaison convexe d'éléments de $C_0 \cap CL(G)$. Par hypothèse, $\chi_1 = \psi = \chi_2$. On peut donc prendre $\lambda_i = \int_{Q^2} \psi_i(x)\mathrm{d}x$. □

Preuve de la proposition 3 Soit $\psi \in C_0 \cap CL(G)$. La partie convexe C_0 est compacte pour la topologie faible-$*$. Par le théorème de Krein-Milman (théorème 3.23 de [Rud91]) et le lemme 4, ψ est limite (au sens de la topologie faible-$*$) d'une suite généralisée de combinaisons convexes

$$\left(\sum_{i=1}^{n_j} \mu_i^{(j)} \psi_i^{(j)} + \mu^{(j)} 1\right)_{j\in I}$$

où les $\psi_i^{(j)}$ sont des points extrémaux de $C_0 \cap CL(G)$. Il suffit pour conclure de montrer que $\lim_{j\in I} \mu^{(j)} = 0$ car alors la suite généralisée

$$\left(\sum_{i=1}^{n_j} \lambda_i^{(j)} \psi_i^{(j)}\right)_{j\in I} \quad \text{où } \lambda_i^{(j)} = \frac{\mu_i^{(j)}}{1-\mu^{(j)}}$$

est formée de combinaisons convexes de fonctions conditionnellement de type négatif normalisées, indécomposables par le lemme 4, et converge vers ψ.

Prenons donc $\delta > 0$ et montrons que pour j assez grand, on a $\mu^{(j)} < \delta$. Soit V un voisinage compact de e tel que $\psi(g) < \frac{\delta}{2}$ pour tout $g \in V$. On pose alors $f = \frac{1}{m(V)}\chi_V$ où χ_V désigne la fonction caractéristique de V. Ainsi $f \in L^1_{f_0}(G)$ et

$$\int_G \psi(x)f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{m(V)}\int_V \psi(x)\mathrm{d}x < \frac{\delta}{2}\,.$$

Par convergence faible-$*$, on obtient pour j assez grand

$$\left| \int_G \psi(x) f(x) \mathrm{d}x - \int_G \left(\sum_{i=1}^{n_j} \mu_i^{(j)} \psi_i^{(j)}(x) + \mu^{(j)} \right) f(x) \mathrm{d}x \right| < \frac{\delta}{2}$$

et en combinant avec la précédente inégalité, il vient

$$\int_G \left(\sum_{i=1}^{n_j} \mu_i^{(j)} \psi_i^{(j)}(x) + \mu^{(j)} \right) f(x) \mathrm{d}x < \delta \ .$$

Mais d'autre part, comme $\int_G \psi_i^{(j)}(x) f(x) \mathrm{d}x \geqslant 0$ et $\int f(x) \mathrm{d}x = 1$, on doit avoir

$$\mu^{(j)} \leqslant \int_G \left(\sum_{i=1}^{n_j} \mu_i^{(j)} \psi_i^{(j)}(x) + \mu^{(j)} \right) f(x) \mathrm{d}x$$

d'où on tire que $\mu^{(j)} < \delta$. $\square$

Remarque La formule de Levy-Khinchin fournit une représentation intégrale des fonctions conditionnellement de type négatif sur la droite réelle. Dans l'appendice 1 de [LiOs77], on trouvera une preuve de cette formule, également basée sur le théorème de Krein-Milman.

4 Représentations irréductibles orthogonales et unitaires

Le but de cette section est de démontrer

Proposition 5 *Soit G un groupe topologique. Si $\overline{H^1}(G,\pi) = 0$ pour toute représentation unitaire irréductible π du groupe G alors $\overline{H^1}(G,\sigma) = 0$ pour toute représentation orthogonale irréductible σ du groupe G.*

L'outil essentiel de la preuve de cette proposition est la proposition suivante (voir [SV02]).

Proposition 6 *Si σ est une représentation orthogonale irréductible du groupe G alors la représentation complexifiée $\sigma_{\mathbb{C}}$ est somme directe d'au plus deux représentations unitaires irréductibles.*

Les lemme et corollaire qui suivent, également utile à la preuve de la proposition 5 sont classiques.

Lemme 5 *Soient π_1 et π_2 deux représentations orthogonales (resp. unitaires). On a un isomorphisme (bicontinu) d'espaces vectoriels topologiques*

$$Z^1(G, \pi_1 \oplus \pi_2) \simeq Z^1(G, \pi_1) \oplus Z^1(G, \pi_2).$$

Cet isomorphisme fait correspondre

$$B^1(G, \pi_1 \oplus \pi_2) \qquad \text{et} \qquad B^1(G, \pi_1) \oplus B^1(G, \pi_2).$$

En particulier, on a les isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques

$$H^1(G, \pi_1 \oplus \pi_2) \simeq H^1(G, \pi_1) \oplus H^1(G, \pi_2)$$

et

$$\overline{H^1}(G, \pi_1 \oplus \pi_2) \simeq \overline{H^1}(G, \pi_1) \oplus \overline{H^1}(G, \pi_2).$$

Preuve du Lemme 5 Notons P_i la projection orthogonale de $\mathcal{H}_{\pi_1} \oplus \mathcal{H}_{\pi_2}$ sur $\mathcal{H}_{\pi_i}$ $(i = 1, 2)$.

On vérifie aisément que les applications

$$Z^1(G, \pi_1 \oplus \pi_2) \longrightarrow Z^1(G, \pi_1) \oplus Z^1(G, \pi_2) \ ; \ b \longmapsto (P_1 \circ b, P_2 \circ b)$$

et

$$Z^1(G, \pi_1) \oplus Z^1(G, \pi_2) \longrightarrow Z^1(G, \pi_1 \oplus \pi_2) \ ; \ (b_1, b_2) \longmapsto b_1 \oplus b_2$$

sont inverse l'une de l'autre et fournissent les isomorphismes et la correspondance annoncés. □

Corollaire 2 *Soit σ une représentation orthogonale et $\sigma_{\mathbb{C}}$ la représentation complexifiée. On a*

$$H^1(G, \sigma) = \{0\} \qquad \text{si et seulement si} \qquad H^1(G, \sigma_{\mathbb{C}}) = \{0\}$$

et

$$\overline{H^1}(G, \sigma) = \{0\} \qquad \text{si et seulement si} \qquad \overline{H^1}(G, \sigma_{\mathbb{C}}) = \{0\}$$

Preuve du Corollaire 2 Soit σ une représentation orthogonale. La représentation complexifiée $\sigma_{\mathbb{C}}$, vue comme représentation orthogonale, s'écrit alors $\sigma_{\mathbb{C}} = \sigma \oplus \sigma$. Grâce au lemme 5 on a alors

$$H^1(G, \sigma_{\mathbb{C}}) = H^1(G, \sigma) \oplus H^1(G, \sigma) \ ; \ \overline{H^1}(G, \sigma_{\mathbb{C}}) = \overline{H^1}(G, \sigma) \oplus \overline{H^1}(G, \sigma)$$

ce qui achève la preuve. □

Preuve de la proposition 5 Soit σ une représentation orthogonale irréductible de G. Si la représentation complexifiée $\sigma_{\mathbb{C}}$ est irréductible, on a $\overline{H^1}(G, \sigma_{\mathbb{C}}) = 0$ et donc $\overline{H^1}(G, \sigma) = 0$ par le corollaire 2. Si la représentation complexifiée $\sigma_{\mathbb{C}}$ est réductible, elle s'écrit comme une somme directe

$$\sigma_{\mathbb{C}} = \sigma_1 \oplus \sigma_2$$

de deux représentations unitaires irréductibles σ_1 et σ_2 (Proposition 6) dont la cohomologie réduite est nulle (par hypothèse). Grâce au lemme 5 :

$$\overline{H^1}(G, \sigma_{\mathbb{C}}) = \{0\}$$

et on conclut à l'aide du corollaire 2 que

$$\overline{H^1}(G, \sigma) = \{0\}.$$

□

5 Annulation de la 1-cohomologie réduite

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Proposition 7 *Soit G un groupe localement compact et compactement engendré.*

Si $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ pour toute représentation orthogonale irréductible π du groupe G alors $\overline{H^1}(G, \rho) = 0$ pour toute représentation orthogonale ρ du groupe G.

Cette proposition est l'analogue du Théorème 4 pour les représentations orthogonales. La nécessité de transiter par les représentations orthogonales s'explique par le dictionnaire entre représentations orthogonales et fonctions conditionnellement de type négatif. (cf. Théorème 1).

Preuve du théorème 4 Elle se fait en trois pas

Premier pas Si $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$ pour toute représentation unitaire irréductible π de G, alors $\overline{H^1}(G, \sigma) = 0$ pour toute représentation orthogonale irréductible σ de G : c'est la proposition 5 de la section 4.

Deuxième pas Si $\overline{H^1}(G, \sigma) = 0$ pour toute représentation orthogonale irréductible σ de G, alors $\overline{H^1}(G, \rho) = 0$ pour toute représentation orthogonale ρ de G : c'est la proposition 7 ci-dessus.

Troisième pas Si $\overline{H^1}(G,\rho) = 0$ pour toute représentation orthogonale irréductible π de G, alors $\overline{H^1}(G,\theta) = 0$ pour toute représentation unitaire θ de G : ce pas est trivial, car toute représentation unitaire peut être vue comme représentation orthogonale par restriction des scalaires de $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}$.

$\square$

Si π est une représentation orthogonale de G et $b \in Z^1(G,\pi)$, en posant

$$\alpha(g)v = \pi(g)v + b(g) \qquad \text{pour } g \in G,\ v \in \mathcal{H}_\pi$$

on définit une *action affine* de G sur $\mathcal{H}_\pi$ de partie linéaire π. On vérifie aisément que α possède un point fixe si et seulement si $b \in B^1(G,\pi)$.

Définition 3 *L'action affine* α possède presque des point fixes *si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute partie compacte K de G, il existe $v \in \mathcal{H}_\pi$ tel que $\|\alpha(g)v - v\| < \varepsilon$ pour tout $g \in K$.*

Nous dirons qu'une fonction conditionnellement de type négatif ψ sur G est associée à l'action affine α s'il existe $v \in \mathcal{H}_\pi$ tel que

$$\psi(g) = \|\alpha(g)v - v\|^2$$

pour tout $g \in G$. La caractérisation suivantes des actions affines possédant presque des points fixes est due à Y. Shalom (voir [Sha00], corollaire 6.6).

Lemme 6 *Soit G un groupe localement compact engendré par un voisinage Q de e, symétrique et compact. Soit α une action affine du groupe G sur l'espace de Hilbert (réel) $\mathcal{H}$ donnée par*

$$\alpha(g)v = \pi(g)v + b(g).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) L'action affine α possède presque des points fixes ;

(ii) b est presque un cobord (i.e. $b \in \overline{B^1}(G,\pi)$) *;*

(iii) Toute fonction conditionnellement de type négatif normalisée ψ sur G de la forme $\psi(g) = \|\alpha(g)\xi - \xi\|^2$ ($\xi \in \mathcal{H}$) vérifie la condition

$$(*)\quad \left| \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists a_1, \dots a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ avec } \sum a_i = 1 \text{ et } \exists g_1, \dots, g_n \in G \\ \text{tels que } \forall g \in Q \text{ on a} \\ \qquad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \Big(\psi(g_j^{-1} g g_i) - \psi(g_j^{-1} g_i) \Big) < \varepsilon \end{array} \right|$$

(iv) *Il existe ψ une fonction conditionnellement de type négatif normalisée sur G de la forme $\psi(g) = \|\alpha(g)\xi - \xi\|^2$ $(\xi \in \mathcal{H})$ qui vérifie la condition $(*)$.*

Proposition 8 *L'ensemble des fonctions conditionnellement de type négatif normalisées sur G qui vérifient la condition $(*)$ est un cône convexe C fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Autrement dit,*

(a) *Si $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et ψ est une fonction conditionnellement de type négatif normalisée sur G satisfaisant $(*)$, alors $\lambda\psi$ est une fonction de même type.*

(b) *Si ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions conditionnellement de type négatif normalisées sur G satisfaisant $(*)$, alors $\psi_1 + \psi_2$ est une fonction de même type.*

(c) *Si $(\psi_i)_{i\in I}$ est une suite généralisée de fonctions conditionnellement de type négatif normalisées sur G satisfaisant $(*)$ et si ψ est une fonction conditionnellement de type négatif normalisée sur G avec $\psi_i \xrightarrow[i\in I]{} \psi$ (uniformément sur les compacts de G), alors ψ satisfait $(*)$.*

Preuve de la proposition 8

(a) Evident.

(b) Ecrivons $\psi_i(g) = \|\alpha_i(g)\xi_i - \xi_i\|^2$ $(i = 1, 2)$ avec α_i une action affine sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{H}_i$ et $\xi_i \in \mathcal{H}_i$. Par la proposition 6, α_1 et α_2 ont presque des points fixes.
Considérons l'action affine β sur $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ donnée par

$$\beta(g)(\eta_1, \eta_2) = \Big(\alpha_1(g)\eta_1, \alpha_2(g)\eta_2\Big).$$

Il est clair que β possède presque des points fixes.
Posons $\psi = \psi_1 + \psi_2$. On a $\psi(g) = \|\beta(g)(\xi_1, \xi_2) - (\xi_1, \xi_2)\|^2$ et donc le lemme 6 implique que ψ vérifie $(*)$.

(c) Par contraposée, supposons que ψ ne satisfait pas la condition $(*)$ du lemme 6 ; donc la fonction ψ satisfait la condition

$$(**)\left|\begin{array}{l}\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que}\\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1,\dots a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ avec } \sum a_i = 1 \text{ et } \forall g_1,\dots,g_n \in G\\ \text{il existe } g \in Q \text{ avec}\\ \qquad\qquad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \Big(\psi(g_j^{-1} g g_i) - \psi(g_j^{-1} g_i)\Big) \geq \varepsilon\ .\end{array}\right|$$

Montrons alors qu'il existe $i \in I$ tel que ψ_i satisfait $(**)$ pour $\frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ avec $\sum a_j = 1$ et $g_1,\dots,g_n \in G$. Choisissons un $g \in Q$ dont l'existence est assurée par $(**)$.

Il suffit de montrer que

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \big(\psi_i(g_k^{-1} g g_j) - \psi_i(g_k^{-1} g_j)\big) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

La réunion des $g_k^{-1} g_j$ et des $g_k^{-1} g g_j$ où j,k parcourent $\{1,\dots,n\}$ est un compact de G, qu'on note K. Sur K, $\psi_i \to \psi$ uniformément. Donc pour i assez grand, on a pour tous $j,k \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{aligned}\big|\psi(g_k^{-1} g g_j) - \psi_i(g_k^{-1} g g_j)\big| &< \frac{\varepsilon}{4}\\ \big|\psi(g_k^{-1} g_j) - \psi_i(g_k^{-1} g_j)\big| &< \frac{\varepsilon}{4}\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\Big|\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \big(\psi_i(g_k^{-1} g g_j) - \psi_i(g_k^{-1} g_j)\big) - \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \big(\psi(g_k^{-1} g g_j) - \psi(g_k^{-1} g_j)\big)\Big|$$

$$< \sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \big(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\big) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_j a_k \big(\psi_i(g_k^{-1} g g_j) - \psi_i(g_k^{-1} g_j)\big) \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\square$

Preuve de la proposition 7 Si $\overline{H^1}(G,\sigma) = 0$ pour toute représentation orthogonale irréductible σ de G, par le lemme 6 (et le Théorème 1) toute fonction conditionnellement de type négatif normalisée indécomposable satisfait la propriété $(*)$. Par le Théorème 3, le cône C

de la proposition 8 est le cône $CL(G)$ de toutes les fonctions conditionnellement de type négatif normalisées sur G. Toutes les fonctions conditionnellement de type négatif normalisées vérifient donc la condition $(*)$. A nouveau par le lemme 6, cela veut dire que toute action affine de G possède presque des points fixes, c'est-à-dire $\overline{H^1}(G,\rho) = 0$ pour toute représentation orthogonale ρ de G.

$\square$

Références

[Dix96] J. Dixmier. *Les C*-algèbres et leurs représentations.* Jacques Gabay, 1996 (deuxième édition).

[Gui72] A. Guichardet. Sur la cohomologie des groupes topologiques II. *Bull. Soc. Math.*, 96 :305–332, 1972.

[Gui80] A. Guichardet. *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie.* Cedic/Fernand Nathan, 1980.

[HV89] P. de la Harpe et A. Valette. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Astérisque 175, Société mathématique de France, 1989.

[LiOs77] J.V. Linnik et I.V. Ostrovskii. Decomposition of random variables and vectors. *Transl. of Math. Monographs*, A.M.S., 1977.

[Lou01] N. Louvet. A propos d'un théorème de Vershik et Karpushev. *L'Enseignement Math.*, 47 :287–314, 2001.

[Ped89] G.K. Pedersen. *Analysis Now.* Graduate Texts in Mathematics 118. Springer-Verlag, 1991.

[Rud91] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, 1991 (second edition).

[Sha00] Y. Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. *Invent. Math.*, 141 :1–54, 2000.

[SV02] Y. Stalder et A. Valette. Le lemme de Schur pour les représentations orthogonales. *Expo. Math.*, 20 :279–285, 2002.

[VK84] A.M. Vershik et S.I. Karpushev. Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity and conditionally positive definite functions. *Math. USSR Sbornik*, 47 :513–526, 1984.

Adresse des auteurs :

N.L.
Laboratoire MMAS - Universié de Metz
Ile du Saulcy
F- 57045 Metz - FRANCE

louvet@poncelet.sciences.univ-metz.fr

Y.S. et A.V.
Institut de Mathématiques - Université de Neuchâtel
Rue Emile Argand 11
CH-2007 Neuchâtel - SUISSE

yves.stalder@unine.ch
alain.valette@unine.ch