

# Petites valeurs propres des fibrés principaux en tores

Pierre Jammes

## Abstract

Let  $M^n$  be a compact manifold of dimension  $n$  with free  $T^k$ -action. We consider collapsings of  $M$  on  $N = M/T^k$  such that the sectional curvature and diameter of  $M$  satisfy  $|K(M)| \leq a$  and  $\text{diam}(M) < d$ , and give examples of collapsings for all  $k$  such that the first non-zero eigenvalue of Laplacian acting on 1-forms and 2-forms of  $M$  are bounded above by  $c(M) \cdot \text{inj}(M)^{2k}$ . Moreover we prove that the first non-zero eigenvalue of Laplacian acting on 1-forms of all principal  $T^k$ -bundle  $M$  over  $N$  is bounded below by  $c(n, a, d, N) \cdot \text{Vol}(M)^2$  and  $c \cdot \text{inj}(M)^{2k}$  when  $M$  collapses on  $N$ .

Keywords : collapsing, differential forms, Laplacian, small eigenvalues.  
MSC2000 : 58J50, 58C40

## 1 Introduction

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte connexe orientable de dimension  $n$ . On considère l'opérateur  $\Delta = d\delta + \delta d$  agissant sur l'espace  $\Omega^p(M)$  des  $p$ -formes différentielles sur  $M$ . Le spectre de cet opérateur forme un ensemble discret de nombres positifs ou nuls qu'on notera

$$0 = \lambda_{p,0}(M, g) < \lambda_{p,1}(M, g) \leq \lambda_{p,2}(M, g) \leq \dots,$$

où la multiplicité de  $\lambda_{p,0}(M, g)$  est le  $p$ -ième nombre de Betti de  $M$ , les autres valeurs propres étant répétée s'il y a multiplicité.

On sait qu'à diamètre borné et courbure de Ricci minorée, la première valeur propre non nulle du laplacien agissant sur les fonctions est uniformément minorée ([Gr80], [LY80]). B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [CC90] qu'il n'en va pas de même pour les formes différentielles de degré quelconque et qu'à diamètre et courbure sectionnelle bornés, on peut avoir des valeurs propres arbitrairement petites. De plus, ils montrent que ce phénomène de petites valeurs propres est lié au fait que la variété s'effondre, c'est-à-dire que son volume — ou de manière équivalente son rayon d'injectivité — tend vers zéro, ce qui conduit à considérer le problème suivant :

**Question 1.1** *Peut-on minorer  $\lambda_{p,1}$  en fonction de bornes sur le diamètre, la courbure et le rayon d'injectivité, notamment lorsque la variété s'effondre ?*

S. Chanillo et F. Trèves donnent dans [CT97] une minoration générale qui se comporte asymptotiquement comme  $\text{injrads}(M, g)^{4n^2+8n-2}$  quand le rayon d’injectivité tend vers zéro mais qui n’est *a priori* pas optimale. Dans [CC00], B. Colbois et G. Courtois étudient le cas particulier des fibrés en cercles s’effondrant sur leur base et montrent — entre autres choses — que les petites valeurs propres sont alors de l’ordre du rayon d’injectivité au carré. Par ailleurs, pour les situations de limites adiabatiques sur les feuilletages (c’est-à-dire lorsque la métrique s’écrit sous la forme  $g = g_H \oplus \varepsilon^2 g_V$  où  $g_V$  une métrique sur les espaces tangents  $V$  aux feuilles,  $g_H$  une métrique sur une distribution complémentaire à  $V$ ), on sait ([Fo95], [ALK00]) qu’on peut calculer pour tout entier  $k$  le nombre de petites valeurs propres de l’ordre de  $\varepsilon^{2k}$  à l’aide d’une suite spectrale, mais cette méthode n’a pas donné lieu à d’exemples explicites.

À notre connaissance, on a encore exhibé à ce jour aucun exemple de petite valeur propre tendant plus vite que le volume ou le rayon d’injectivité au carré quand la variété s’effondre, ce qui conduit à reformuler la question 1.1 :

**Question 1.2** *Peut-on obtenir une minoration de  $\lambda_{p,1}(M, g)$  asymptotiquement de l’ordre de  $\text{injrads}(M, g)^2$  ou  $\text{Vol}(M, g)^2$  quand la variété s’effondre ?*

Le but de notre travail est de donner des éléments de réponses à la question 1.2 en étudiant le spectre des fibrés principaux en tores s’effondrant sur leur base. Nous allons montrer deux résultats. Le premier apporte une réponse négative à la question 1.2 en ce qui concerne le rayon d’injectivité : avec des effondrements bien choisis et en faisant appel à des notions d’approximations diophantiennes, on peut construire pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  des valeurs propres décroissant plus vite que  $\text{injrads}(M, g)^{2k}$ . Plus précisément :

**Théorème 1.3** *Pour tout entier  $k \geq 1$  et pour toute variété  $(N, h)$  telle que  $b_2(N) \geq k$ , il existe un fibré principal  $M$  en tore  $T^k$  sur  $N$ , une famille de métrique  $(g_\varepsilon)_{\varepsilon \in ]0,1]}$  sur  $M$ , et des réels strictement positifs  $C(k, (N, h))$  et  $\varepsilon_0(k, (N, h))$  tels que la courbure et le diamètre de  $(M, g_\varepsilon)$  soient uniformément bornés par rapport à  $\varepsilon$ ,  $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon$ , et*

$$\lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon) \leq C \cdot \text{injrads}^{2k}(M, g_\varepsilon) \tag{1.4}$$

pour  $p = 1$  et  $2$ , et pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .

De plus, si  $b_1(N) > b_2(M)$ , on a aussi pour  $p = 2$  et  $3$

$$\lambda_{p,b_1(N)-b_2(M)}(M, g_\varepsilon) \leq C \cdot \text{injrads}^{2k}(M, g_\varepsilon) \tag{1.5}$$

**Remarque 1.6** Le théorème 1.3 montre qu’on ne peut pas minorer la première valeur propre du laplacien par une puissance de rayon d’injectivité indépendante de la dimension. Plus précisément, comme on peut construire des variétés de dimension 3 dont le 2<sup>e</sup> nombre de Betti est arbitrairement

grand, il existe pour tout  $n \geq 4$  des variétés de dimension  $n$  vérifiant (1.4) avec  $k = n - 3$ . On ne peut donc pas espérer obtenir de minoration générale par le rayon d'injectivité avec un exposant inférieur à  $2n - 6$  si  $n \geq 4$ .

**Remarque 1.7** On verra dans la section 5 qu'il existe effectivement des fibrés vérifiant la condition  $b_1(N) > b_2(M)$ .

En petite dimension, on peut en déduire un résultat pour les formes de tout degré :

**Corollaire 1.8** *Pour  $n = 5$  et  $7$ , il existe un fibré  $M$  en tores  $T^2$  sur une variété de dimension  $n-2$ , une suite de métrique  $(g_\varepsilon)$  sur  $M$  et une constante  $C > 0$  telles que la suite  $(g_\varepsilon)$  effondre le fibré  $M$  sur sa base à courbure et diamètre bornés quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, et que*

$$\lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon) \leq C \cdot \text{injad}^4(M, g_\varepsilon) \quad (1.9)$$

pour  $1 \leq p \leq n - 1$ .

Le second théorème donne, dans le cas des 1-formes, des minoration du spectre en fonction du volume et du rayon d'injectivité :

**Théorème 1.10** *Soit deux réels  $a$  et  $d$  strictement positifs, un entier  $n \geq 3$  et  $(N, h)$  une variété riemannienne de dimension strictement inférieure à  $n$ . Il existe des constantes  $\varepsilon_0(n, a, d, (N, h)) > 0$ ,  $C(n, a, d, (N, h)) > 0$  et  $C'(n, a, d, (N, h)) > 0$  telles que si  $(M, g)$  est une variété riemannienne de dimension  $n$  vérifiant  $\text{diam}(M, g) \leq d$ ,  $|K(M, g)| \leq a$  et si  $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  est une fibration principale de fibre  $T^k$  qui soit une  $\varepsilon$ -approximation de Hausdorff avec  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , alors*

$$\lambda_{1,1}(M, g) \geq C \cdot \text{Vol}^2(M, g) \geq C' \cdot \text{injad}^{2k}(M, g). \quad (1.11)$$

**Remarque 1.12** L'exposant du volume dans la minoration (1.11) est optimal. On peut par exemple considérer le cas de produit riemannien d'un fibré en cercle qui s'effondre par un tore dont la métrique est fixée mais dont le diamètre est suffisamment petit pour que le fibré produit soit proche de la base pour la distance de Gromov-Hausdorff, les résultats de [CC00] assurent que dans ce cas,  $\lambda_{1,1}(M)$  ne peut pas décroître plus lentement que  $\text{Vol}^2(M)$ . L'inégalité (1.4) assure par ailleurs que l'exposant du rayon d'injectivité dans (1.11) est lui aussi optimal.

**Remarque 1.13** On sait déjà que si la fibre est de dimension supérieure ou égale à deux, on ne peut pas obtenir pour les fibrés en tores de majoration de  $\lambda_{1,1}(M)$  par le volume au carré comme c'est le cas pour les fibrés en cercles. En effet, on peut construire des exemples d'effondrement de fibrés principaux en tores pour lesquels la première valeur propre du laplacien ne tend pas vers zéro (cf. [Ja03], théorème 1.13 et paragraphe 4.2).

Le théorème 1.10 soulève les deux questions suivantes qui restent ouvertes :

**Question 1.14** *Peut-on généraliser ces résultats aux  $p$ -formes différentielles, pour tout  $p$  ?*

**Question 1.15** *La minoration du spectre par le volume au carré de la variété se généralise-t-elle à d'autres familles de variétés ?*

Pour démontrer les théorèmes 1.3 et 1.10, nous commencerons par trois sections préliminaires sur la topologie, la géométrie et le spectre des fibrés principaux en tores.

Dans la section 2, nous définirons un invariant topologique généralisant la classe d'Euler des fibrés en cercle et qui pourra être utilisé pour contrôler le spectre.

La section 3 sera consacrée à l'étude de la géométrie des fibrés principaux en tores. Le résultat principal est que pour démontrer le théorème 1.10 on peut se ramener à une situation géométrique simple. En particulier, on montrera qu'une métrique de courbure et diamètre bornés sur le fibré est proche d'une métrique invariante pour laquelle les fibres sont totalement géodésiques :

**Théorème 1.16** *Soient  $a$  et  $d$  deux réels strictement positifs,  $n$  un entier et  $(N, h)$  une variété riemannienne de dimension strictement inférieure à  $n$ . Il existe des constantes  $\varepsilon_0(n, a, d, (N, h)) > 0$ ,  $\tau(n, a, d, (N, h)) > 0$  et  $\tau'(n, a, d, (N, h)) > 0$  telles que si  $(M, g)$  est une variété riemannienne de dimension  $n$  vérifiant  $|K(M, g)| \leq a$ ,  $\text{diam}(M, g) \leq d$  et si  $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  une fibration principale de fibre  $T^k$  qui soit une  $\varepsilon$ -approximation de Hausdorff avec  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , alors il existe des métriques  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  sur  $M$  et  $N$  respectivement et une fibration principale  $\pi' : (M, \tilde{g}) \rightarrow (N, \tilde{h})$  telles que*

1. *L'action de  $T^k$  sur  $(M, \tilde{g})$  est isométrique ;*
2. *Les fibres de la fibration  $\pi'$  sont totalement géodésiques ;*
3.  *$\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$  et  $\frac{1}{\tau}h \leq \tilde{h} \leq \tau h$  ;*
4. *La restriction de  $\tilde{g}$  à la fibre est telle que  $\text{diam}(\pi'^{-1}(x)) \leq \tau'\varepsilon$ , pour tout  $x \in N$ .*

**Remarque 1.17** On verra aussi que si l'on suppose que la métrique  $g$  sur  $M$  est  $T^k$ -invariante, alors on peut remplacer dans le théorème 1.16 l'hypothèse sur la courbure de  $(M, g)$  par l'hypothèse plus faible  $K(M, g) \geq -a$ .

Dans la section 4, nous étudierons comment, dans le cas d'un fibré principal en tore  $T^k$  muni d'une métrique invariante, on peut se ramener à l'étude des petites valeurs propres du laplacien à celle du spectre du laplacien restreint aux formes différentielles invariantes par l'action de  $T^k$  :

**Théorème 1.18** *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $T^k \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N$  un fibré en tore  $T^k$ ,  $\tilde{g}$  une métrique invariante sur  $T^k$  et  $f$  une fonction sur  $N$  strictement positive.*

Supposons que  $M$  est muni d'une métrique  $T^k$ -invariante  $g$  telle que pour tout  $x \in N$ , la restriction  $\bar{g}_x$  de  $g$  à la fibre  $\pi^{-1}(x)$  vérifie  $\bar{g}_x \leq f(x) \cdot \bar{g}$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre du laplacien agissant sur les formes différentielles de  $M$ . Si  $\lambda < (\sup_{x \in N} f(x))^{-1} \cdot \lambda_{0,1}(T^k, \bar{g})$ , alors les formes propres associées sont  $T^k$ -invariantes.

**Remarque 1.19** On peut montrer que cette estimation est optimale : si on considère un fibré trivial muni d'une métrique produit, on voit que les formes propres de  $T^k$  de valeur propre  $\lambda_{0,1}(T^k, \bar{g})$  induisent sur le fibré des formes propres de même valeur propre qui ne sont pas invariantes.

**Remarque 1.20** Dans le cas des fibrés en cercle (voir théorème 4.11), le théorème 1.18 améliore sensiblement un résultat semblable obtenu par B. Colbois et G. Courtois ([CC00], théorème 3.4) et qui nécessitait des hypothèses de courbure et diamètre bornés.

**Remarque 1.21** La démonstration des deux théorèmes met en évidence le fait que si la multiplicité d'une valeur propre est impaire, alors le sous-espace propre associé contient des formes invariantes.

Les deux dernières sections seront consacrées aux démonstrations des théorèmes 1.3 et 1.10. Dans la section 5, nous construirons les exemples d'effondrements annoncés dans le théorème 1.3.

Enfin, dans la section 6, nous démontrerons l'inégalité (1.11) du théorème 1.10 en utilisant les résultats des sections précédentes, et nous discuterons de la possibilité d'exprimer les constantes  $C$  et  $C'$  du théorème 1.10 en fonction d'invariants géométriques de  $(N, h)$ .

## 2 Topologie des fibrés principaux en tore

Nous allons dans cette partie nous attacher à décrire la topologie des fibrés principaux en tore, et en particulier à construire un invariant différentiel qui permettra, comme la classe d'Euler dans la cas des fibrés en cercles, d'étudier le comportement du spectre du laplacien lors d'un effondrement.

Soit  $M$  un fibré principal en tore  $T^k$  sur une base  $N$ . Le tore  $T^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$  peut s'écrire comme le produit de  $k$  cercles :  $T^k = \prod_{i=1}^k S^1_{(i)}$ . L'action de  $T^k$  sur  $M$  induit une action de chacun des  $S^1_{(i)}$ . On peut donc définir les variétés

$$M_i = M / \prod_{j \neq i} S^1_{(j)}, \quad (2.1)$$

chaque  $M_i$  étant un fibré en cercle de base  $N$  sur lequel agit  $S^1_{(i)}$ . Réciproquement, la donnée des  $k$  fibrés en cercles  $(M_i)_{i \leq k}$  sur  $N$  permet de construire un fibré en tore  $T^k$  en prenant la somme de Whitney  $\bigoplus_{i=1}^k M_i$  de ces fibrés en cercles, ce fibré en tore étant difféomorphe au fibré  $M$ . Comme la structure d'un fibré en cercle est déterminé par sa classe d'Euler, la topologie de

$M$  est déterminée par la donnée d'un  $k$ -uplet  $(e_1, \dots, e_k) \in (H^2(N, \mathbb{Z}))^k$  de classes d'Euler. Cependant, la décomposition de  $T^k$  en produit de cercles n'est pas unique. En effet, pour chaque base  $(a_1, \dots, a_k)$  du réseau  $\mathbb{Z}^k$ , on peut écrire  $T^k$  comme le produit de la famille de cercles  $(\mathbb{R}a_i/\mathbb{Z}a_i)_i$ , auquel correspond en général un  $k$ -uplet différent de classes d'Euler.

Dans le cas d'un fibré en cercle de classe d'Euler  $[e]$ , on a la propriété suivante ([BT82], p.72) : si  $\omega$  est la 1-forme de connexion du fibré, alors  $d\omega$  est une 2-forme horizontale qui dépend du choix de la connexion sur le fibré, mais qui est, au signe près, le relevé d'un élément de  $[e]$ . Dans le cas d'un fibré en tore, on va construire un invariant qui généralise cette propriété.

Dans le cas d'un fibré principal quelconque, la forme de connexion est une 1-forme verticale à valeur dans l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  de la fibre. Si on se donne un élément  $\bar{\omega}$  de  $\mathcal{G}^*$  et qu'on applique  $\bar{\omega}$  à l'image de la forme de connexion, on obtient une 1-forme verticale à valeur réelle. On dira que cette forme différentielle est « induite » par  $\bar{\omega}$ . De la même manière, la forme de Maurer-Cartan définissant un isomorphisme entre chaque espace tangent vertical et  $\mathcal{G}$ , chaque élément de  $\mathcal{G}$  « induit » un champ de vecteur vertical sur le fibré via cet isomorphisme. Notons que ce champ est défini indépendamment de la connexion, contrairement aux formes induites par les éléments de  $\mathcal{G}^*$ .

On va montrer le résultat suivant, qui permet de définir une généralisation de la classe d'Euler aux fibrés principaux en tore :

**Proposition 2.2** *Soit  $\bar{\omega} \in \mathcal{G}^*$ ,  $\omega$  la 1-forme différentielle sur  $M$  induite par  $\bar{\omega}$  et  $\alpha_\omega$  la 2-forme différentielle sur  $N$  telle que  $d\omega = \pi^*(\alpha_\omega)$ . Alors l'application  $e : \mathcal{G}^* \rightarrow H^2(N, \mathbb{R})$  donnée par  $\bar{\omega} \mapsto [e_\omega]$  est bien définie (c.-à-d. que la classe de cohomologie de  $\alpha_\omega$  ne dépend pas du choix de la connexion) et linéaire.*

**Démonstration :** On pose  $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$  et on note  $(\bar{\omega}_i)_{i \in [1, k]}$  les formes coordonnées de  $\mathbb{R}^k$  passées au quotient sur  $T^k$ . En utilisant la décomposition  $T^k = \prod_{i=1}^k S_{(i)}^1$ , on définit la famille de fibrés en cercle  $(M_i)$  comme en (2.1).

On a alors des projections  $M \xrightarrow{\pi_i} M_i \xrightarrow{\pi'_i} N$  qui vérifient  $\pi'_i \circ \pi_i = \pi'_j \circ \pi_j = \pi$ . Chaque forme  $\omega_i$  induite sur  $M$  par  $\bar{\omega}_i$  est le relevé  $\pi_i^*(\omega'_i)$  de la forme de connexion du fibré en cercle  $M_i$ . On peut écrire  $d\omega_i = \pi_i^*(d\omega'_i) = \pi^*(e_i)$  où  $e_i$  est une 2-forme sur  $N$ . Or, on sait que  $e_i$  appartient à la classe d'Euler du fibré  $M_i$ , indépendamment du choix de la connexion sur  $M_i$  donc du choix de la connexion sur  $M$ . Si on définit  $e : \mathcal{G}^* \rightarrow H^2(N, \mathbb{R})$  par  $e(\bar{\omega}_i) = e_i$  en l'étendant par linéarité, on aura bien, par linéarité de la différentielle extérieure,  $d\omega = \pi^*(e(\bar{\omega}))$  pour tout  $\bar{\omega} \in \mathcal{G}^*$ , en notant  $\omega$  la forme induite sur  $M$ . ■

**Remarque 2.3** Si  $k = 1$  et si  $\bar{\omega}$  est la forme volume du cercle de longueur 1, alors  $e(\bar{\omega})$  est la classe d'Euler du fibré.

**Remarque 2.4** La démonstration 2.2 met en évidence le lien entre l'invariant  $e$  et la famille de classe d'Euler associée à une décomposition parti-

culière en somme de Whitney de  $M$  : à chaque décomposition possible est associée une base de  $\mathcal{G}^*$ , et la famille de classe d'Euler est l'image de cette base par  $e$ .

**Exemple 2.5** Le théorème 1.13 de [Ja03] montre — entre autres choses — qu'un fibré principal en tore  $T^k$  non trivial dont la base est un tore  $T^2$  peut s'écrire comme produit d'une nilvariété de dimension 3 et d'un tore  $T^{k-1}$ . Comme  $H^2(T^2)$  est de dimension 1, le noyau de  $e$  est de dimension  $k-1$ , ce qui signifie qu'on peut décomposer le fibré en une somme de Whitney de  $k$  fibrés en cercles dont  $k-1$  sont triviaux. On retrouve donc le fait que le fibré peut s'écrire comme le produit d'un fibré en cercle sur  $T^2$  et d'un tore de dimension  $k-1$ . ■

Dans la suite, si  $\omega$  est une forme induite par un élément  $\bar{\omega}$  de  $\mathcal{G}^*$ , on écrira parfois par abus de langage «  $e(\omega)$  » au lieu de «  $e(\bar{\omega})$  ». De plus, verra parfois  $e$  comme une application de  $\mathcal{G}^*$  dans l'espace  $\mathcal{H}^2(N, h)$  des 2-formes harmoniques de  $N$ , en utilisant le fait que  $\mathcal{H}^2(N, h)$  est canoniquement isomorphe à  $H^2(N, \mathbb{R})$ .

### 3 Géométrie des fibrés principaux en tore

#### 3.1 Métriques adaptées

Nous allons ici montrer qu'on peut, dans le but d'obtenir le théorème 1.10, se ramener à une situation géométrique pour laquelle l'étude du spectre d'un fibré en tore est plus simple. Cette situation est une généralisation de la notion de métrique adaptée définie dans le cas des fibrés en cercle par B. Colbois et G. Courtois ([CC00]) :

**Définition 3.1** *On dit que le couple de métriques  $(g, h)$  définies sur  $M$  et  $N$  respectivement est adapté à la fibration principale  $T^k \hookrightarrow M^n \xrightarrow{\pi} N$  si :*

- I. *La fibration  $\pi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  est une submersion riemannienne ;*
- II. *L'action de  $T^k$  sur  $M$  est isométrique ;*
- III. *Les fibres sont totalement géodésiques ;*
- IV. *Toute 1-forme verticale  $\omega$  induite par un élément de  $\mathcal{G}^*$  vérifie  $d\omega = \pi^*(e(\omega))$ .*

On veut montrer qu'une métrique de courbure bornée sur un fibré principal en tore est proche d'une métrique adaptée :

**Théorème 3.2** *Soient  $a$  et  $d$  deux réels strictement positifs, et  $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$  un fibré principal en tore. Il existe des constantes  $\varepsilon_0(n, a, d, (N, h)) > 0$ ,  $\tau(n, a, d, (N, h)) > 0$ ,  $\tau'(n, a, d, (N, h)) > 0$  et  $c(n, a, d, (N, h)) > 0$  telles que si  $|K(N, h)| \leq a$ ,  $|K(M, g)| \leq a$ ,  $\text{diam}(M, g) \leq d$  et si  $\pi$  est une  $\varepsilon$ -approximation de Hausdorff avec  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,*

alors il existe des métriques  $\tilde{g}$  et  $\tilde{h}$  sur  $M$  et  $N$  respectivement et une fibration  $\pi' : (M, \tilde{g}) \rightarrow (N, \tilde{h})$  telles que

1. Le couple  $(\tilde{g}, \tilde{h})$  est adapté à la fibration  $\pi'$  ;
2.  $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$  et  $\frac{1}{\tau}h \leq \tilde{h} \leq \tau h$  ;
3. La restriction de  $\tilde{g}$  à la fibre est telle que  $\text{diam}(\pi'^{-1}(x)) \leq \tau'\varepsilon$ , pour tout  $x \in N$  ;
4. La courbure sectionnelle de  $(M, \tilde{g})$  vérifie  $|K(X, Y)| \leq c$ , pour toute paire de vecteurs horizontaux orthonormés  $(X, Y)$ .

On pourra alors appliquer le résultat de J. Dodziuk selon lequel si deux métriques sont proches, alors les spectres du laplacien pour ces deux métriques sont proches aussi :

**Théorème 3.3 ([Do82])** *Soit  $g$  et  $\tilde{g}$  deux métriques riemanniennes sur une variété  $M$  de dimension  $n$ , et  $\tau$  une constante positive. Si les deux métriques vérifient  $\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g$ , alors*

$$\frac{1}{\tau^{n+2p+1}}\lambda_{p,k}(M, g) \leq \lambda_{p,k}(M, \tilde{g}) \leq \tau^{n+2p+1}\lambda_{p,k}(M, g),$$

pour tout entiers  $k \geq 0$  et  $p \in [0, n]$ .

**Remarque 3.4** Le théorème 3.2 implique en particulier le théorème 1.16. La restriction sur la géométrie imposée par le point 4 de la conclusion du théorème 3.2 permet de mieux contrôler le spectre du laplacien et sera utile dans la démonstration du théorème 1.10.

**Remarque 3.5** En vertu d'un théorème de Hermann ([He60], [Be87] p. 249), le fait que les fibres soient totalement géodésiques implique qu'elles sont isométriques entre elles. On va voir dans la démonstration du théorème 3.2 que réciproquement, sur les fibrés considérés, si la métrique est invariante et que les fibres sont isométriques alors elles sont totalement géodésiques.

### 3.2 Situation de métrique invariante

Nous allons dans un premier temps montrer que si on suppose qu'on a sur  $M$  une métrique invariante, elle est proche d'une métrique qui vérifie les points (i) à (iii) de la définition 3.1. Plus précisément :

**Proposition 3.6** *Soit  $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$  un fibré principal en tore muni d'une métrique invariante  $g$  tel que  $\pi$  soit une submersion riemannienne. Pour tout  $a > 0$  et  $d > 0$ , il existe des constantes  $\tau(n, a, d) > 0$  et  $c(n, a) > 0$  telles que si  $|K(N, h)| \leq a$ ,  $K(M, g) \geq -a$  et  $\text{diam}(M, g) \leq d$ , alors il existe une métrique invariante  $\tilde{g}$  sur  $M$  telle que la fibration  $\pi$  :*



$(M, \tilde{g}) \rightarrow (N, h)$  soit une submersion riemannienne à fibres totalement géodésiques et

$$\frac{1}{\tau}g \leq \tilde{g} \leq \tau g.$$

**Remarque 3.7** On peut noter qu'on utilise non pas une hypothèse de courbure bornée sur  $M$  mais seulement que la courbure sectionnelle est minorée.

Pour montrer la proposition 3.6, on utilisera les deux lemmes suivants. Le premier est une application directe de la formule de O'Neill :

**Lemme 3.8** Soit  $a > 0$  et  $T^k \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$  un fibré principal en tore muni d'une métrique invariante  $g$  tel que  $p$  soit une submersion riemannienne,  $|K(N, h)| \leq a$ , et  $K_{(M, g)}(X, Y) \geq -a$  pour tout couple  $(X, Y)$  de vecteurs horizontaux orthonormés. Alors, pour toute 1-forme différentielle verticale  $\omega$  induite par l'action de  $T^k$ , on a :

1.  $|\mathrm{d}\omega(X, Y)|_x^2 \leq \frac{8a}{3}|\omega|_x^2$ , pour tout  $x \in M$  et tout couple de vecteurs horizontaux orthonormés  $X$  et  $Y$  ;
2.  $\|\mathrm{d}\omega\|_\infty \leq \frac{4an(n-1)}{3}\|\omega\|_\infty$ .

**Démonstration :** Soit  $x \in M$ ,  $y = \pi(x)$ ,  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  deux champs de  $N$  orthonormés en  $y$ , et  $X$  et  $Y$  les relevés de  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  à  $M$ . La formule de O'Neill ([GHL87] p. 127, [Be87] p. 241) donne

$$K_N(\tilde{X}, \tilde{Y}) = K_M(X, Y) + \frac{3}{4} |[X, Y]^V|^2, \quad (3.9)$$

où  $[X, Y]^V$  désigne la composante verticale de  $[X, Y]$ . D'autre part on a, en utilisant le fait que  $\omega$  est verticale,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega(X, Y) &= X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) - \omega([X, Y]) \\ &= -\omega([X, Y]). \end{aligned} \quad (3.10)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\omega(X, Y)|_x^2 &= |\omega([X, Y])|_x^2 \leq |\omega|_x^2 |[X, Y]^V|_x^2 \\ &\leq \frac{4}{3} |\omega|_x^2 (K_y(\tilde{X}, \tilde{Y}) - K_x(X, Y)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Comme chacun des couples  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  et  $(X, Y)$  est orthonormé en  $x$  et  $y$ , on a les majorations  $|K_y(\tilde{X}, \tilde{Y})| \leq a$  et  $K_x(X, Y) \geq -a$ , et donc

$$|\mathrm{d}\omega(X, Y)|_x^2 \leq \frac{8a}{3} |\omega|_x^2. \quad (3.12)$$

Et comme l'inégalité précédente est vraie quel que soit le choix de  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ , il en découle finalement

$$|\mathrm{d}\omega|_x^2 \leq \frac{4an(n-1)}{3} |\omega|_x^2 \leq \frac{4an(n-1)}{3} \|\omega\|^2, \quad (3.13)$$

ce qui achève la démonstration. ■

Le second lemme montre, dans le cas d'un fibré en cercle, qu'à courbure bornée, la longueur des fibres varie peu d'une fibre à l'autre.

**Lemme 3.14** *Soit  $S^1 \hookrightarrow (M^n, g) \xrightarrow{\pi} (N, h)$  un fibré principal en cercle sur  $N$ , tel que  $g$  soit invariante et  $\pi$  soit une submersion riemannienne. Pour tout  $a > 0$  et  $d > 0$ , il existe  $\tau(n, a, d) > 0$  tel que si  $|K(N, h)| \leq a$ ,  $K(M, g) \geq -a$  et  $\text{diam}(M, g) \leq d$ , alors pour tout  $x, y \in N$ , on a*

$$\frac{1}{\tau} l_y \leq l_x \leq \tau l_y,$$

où  $l_x$  et  $l_y$  désignent les longueurs des fibres au dessus de  $\pi^{-1}(x)$  et  $\pi^{-1}(y)$  respectivement.

**Démonstration :** On choisit sur le fibré  $M$  une 1-forme verticale  $\omega$  dont l'intégrale sur chaque fibre est égale à 1. Soit  $U$  le champ vertical induit par l'action de  $S^1$  qui vérifie  $\omega(U) = 1$ . La norme  $|U|$  de ce champ est constante sur chaque fibre, et s'écrit  $|U| = \pi^* f$ , où  $f$  est une fonction sur  $N$ . De plus, en tout point  $x$  de  $N$ , la norme  $f(x)$  de  $U$  est égale à la longueur de la fibre au dessus de  $x$ . On va montrer que  $f$  est bornée en fonction de  $a$  et  $d$ . Remarque :  $\omega$  n'est pas la forme duale de  $U$  pour la métrique. Sa norme ponctuelle sur la fibre  $\pi^{-1}(x)$  est  $|\omega| = \frac{1}{f}$ , et on a  $U^\flat = f^2 \omega$ .

Soit  $x \in N$ , et  $\tilde{X}$  un vecteur unitaire tangent à  $N$  en  $x$ . Soit  $\tilde{X}_i$  une base orthonormée de champs de vecteurs au voisinage de  $x$ , telle que  $D_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_1 = 0$  sur ce voisinage, et  $\tilde{X}_{1|x} = \tilde{X}$ . On relève cette base à  $T^H M$  en notant  $X_i = \pi^*(\tilde{X}_i)$  et  $X = X_1$ . Ces champs vérifient

$$[X_i, U] = 0. \tag{3.15}$$

En effet, ces crochets de Lie sont déterminés par  $[X_i, U] = \frac{d}{dt}(\Phi_t)_* X_i$ , où  $\Phi_t$  est le flot induit par le champ  $U$ . Par définition de  $U$ , ce flot correspond à l'action de  $S^1$  sur  $M$ . Les crochets de Lie sont donc nuls, car les champs  $X_i$  sont  $S^1$ -invariants. On notera par ailleurs  $U'$  le champ de norme 1 défini par  $U' = U/|U|$ .

On va calculer la courbure sectionnelle  $K(X, U)$  en fonction de  $f$  et de ses variations (Remarque : le champ  $U$  n'est pas normé, mais ce calcul est plus simple que si on utilise le champ  $U'$ ). Cette courbure s'écrit

$$\begin{aligned} K(X, U) &= \langle R(X, U)X, U \rangle \\ &= \langle D_U D_X X - D_X D_U X - D_{[X, U]} X, U \rangle, \end{aligned} \tag{3.16}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne la métrique. Le vecteur  $D_X X$  est horizontal et vaut  $\pi^*(D_{\tilde{X}_1} \tilde{X}_1)$  (voir [Be87] p. 239), et par conséquent  $D_X X = 0$  au voisinage de  $x$ . Comme d'autre part  $[X, U] = 0$ , on est ramené à calculer

$$K(X, U) = -\langle D_X D_U X, U \rangle. \tag{3.17}$$

Pour ce faire, on utilisera la formule suivante, qui caractérise la connexion de Levi-Civita :

$$2\langle D_{Z_1} Z_2, Z_3 \rangle = Z_1 \cdot \langle Z_2, Z_3 \rangle + Z_2 \cdot \langle Z_3, Z_1 \rangle - Z_3 \cdot \langle Z_1, Z_2 \rangle \\ + \langle [Z_1, Z_2], Z_3 \rangle - \langle [Z_1, Z_3], Z_2 \rangle - \langle [Z_2, Z_3], Z_1 \rangle. \quad (3.18)$$

En utilisant l'orthogonalité de  $(X_1, \dots, X_n, U)$  et le fait que  $[X_i, U]=0$ , on obtient

$$2\langle D_U X, U \rangle = X \cdot \langle U, U \rangle = X \cdot f^2 = 2f df(X) \quad (3.19)$$

et

$$2\langle D_U X, X_i \rangle = -\langle [X, X_i], U \rangle, \quad (3.20)$$

et donc

$$D_U X = df(X)U' - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle [X, X_i], U \rangle X_i. \quad (3.21)$$

Le premier terme peut s'écrire  $df(X)U' = \frac{df(X)}{f}U$ , par conséquent

$$\begin{aligned} D_X(df(X)U') &= \left( X \cdot \frac{df(X)}{f} \right) U + \frac{df(X)}{f} D_X U \\ &= \left( \frac{(D_X df)(X)}{f} + \frac{df(D_X X)}{f} - \frac{(df(X))^2}{f^2} \right) U \\ &\quad + \frac{df(X)}{f} D_X U \\ &= \frac{\text{Hess } f(X, X)}{f} U - \frac{(df(X))^2}{f^2} U + \frac{df(X)}{f} D_X U, \end{aligned} \quad (3.22)$$

en utilisant le fait que  $D_X X = 0$ . De plus, la relation (3.18) donne

$$2\langle D_X U, U \rangle = X \cdot |U|^2 = 2f df(X),$$

et donc

$$\langle D_X(df(X)U'), U \rangle = f \text{Hess } f(X, X). \quad (3.23)$$

La dérivation des termes suivants de (3.21) donne

$$D_X(\langle [X, X_i], U \rangle X_i) = (X \cdot \langle [X, X_i], U \rangle) X_i + \langle [X, X_i], U \rangle D_X X_i. \quad (3.24)$$

Quand on calcule le produit scalaire de cette expression avec  $U$ , le premier terme s'annule, et comme la relation (3.18) donne  $\langle D_X X_i, U \rangle = \langle [X, X_i], U \rangle$ , il reste

$$\langle D_X(\langle [X, X_i], U \rangle X_i), U \rangle = \langle [X, X_i], U \rangle^2. \quad (3.25)$$

La somme des équations (3.23) et (3.25) donne

$$K(X, U) = -f \text{Hess } f(X, X) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \langle [X, X_i], U \rangle^2. \quad (3.26)$$

En normalisant le vecteur  $U$ , on obtient

$$K(X, U') = -\frac{\text{Hess } f(X, X)}{f} + \frac{1}{2f^2} \sum_{i=1}^n \langle [X, X_i], U \rangle^2. \quad (3.27)$$

Les derniers termes peuvent être majorés en fonction de la courbure. En effet, on a

$$\langle [X, X_i], U \rangle = U^\flat([X, X_i]) = f^2 \omega([X, X_i]) = -f^2 d\omega(X, X_i), \quad (3.28)$$

et donc, en vertu du lemme 3.8,

$$\langle [X, X_i], U \rangle^2 \leq f^4 \frac{8a}{3} |\omega|^2 = \frac{8a}{3} f^2. \quad (3.29)$$

Par hypothèse, la courbure sectionnelle de  $M$  est minorée par  $-a$ . On a donc finalement :

$$\frac{\text{Hess } f(X, X)}{f} \leq \left( \frac{4n}{3} + 1 \right) a. \quad (3.30)$$

Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $N$ , et  $\gamma$  une géodésique minimisante joignant ces deux points. Notons  $\mu$  la fonction définie par

$$\mu(t) = \ln f \circ \gamma(t). \quad (3.31)$$

En dérivant  $\mu$  par rapport à  $t$ , on obtient :

$$\mu'(t) = \frac{df(\gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \quad (3.32)$$

et

$$\begin{aligned} \mu''(t) &= -\left( \frac{df(\gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \right)^2 + \frac{df(D_{\gamma'(t)} \gamma'(t)) + D df(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \\ &= -\mu'(t)^2 + \frac{\text{Hess } f(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

On a donc, en vertu de la majoration (3.30) :

$$\mu''(t) \leq \frac{\text{Hess } f(\gamma'(t), \gamma'(t))}{f \circ \gamma(t)} \leq \left( \frac{4n}{3} + 1 \right) a. \quad (3.34)$$

Supposons que  $x$  est un point où  $f$ , et donc  $\mu$ , atteint son minimum. On a alors  $\mu'(0) = 0$  et donc, en remarquant que  $d$  majore le diamètre de  $N$ ,

$$\mu'(t) \leq \left( \frac{4n}{3} + 1 \right) at, \quad (3.35)$$

et

$$\mu(t) \leq \frac{4n+3}{6} at^2 \leq \frac{4n+3}{6} ad^2. \quad (3.36)$$

Le rapport  $\frac{f(y)}{f(x)}$  est donc majoré par une constante  $\tau = \exp(\frac{4n+3}{6}ad^2)$ . Comme on a montré cette majoration en prenant pour  $x$  un point où  $f$  atteint son minimum, elle sera vraie *a fortiori* pour un  $x$  quelconque.

Remarque : si les fibres sont isométriques, alors le champ  $U$  est de norme constante. Il est aisé de vérifier à l'aide de (3.18) que  $D_U U$  est alors nul, c'est-à-dire que les fibres sont totalement géodésiques. ■

**Démonstration de la proposition 3.6 :** Le but est en fait de généraliser le lemme 3.14 aux fibrés en tore pour montrer que  $g$  est proche d'une métrique pour laquelle toutes les fibres sont isométriques.

Soit  $\bar{U} \in \mathcal{G}$  non nul et  $U$  le champ vertical induit par  $\bar{U}$  sur  $M$ . Soit  $x_0 \in N$ . On choisit  $\bar{U}$  de sorte que  $|\bar{U}| = 1$  au dessus de  $x_0$ . De plus, on impose à  $\bar{U}$  d'avoir un coefficient directeur rationnel, c'est-à-dire que  $\bar{U}$  est colinéaire à un vecteur de  $\mathbb{Z}^k \subset \mathcal{G}$ . L'action du flot associé à  $U$  induit alors une fibration  $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} (M', g')$ . On peut contrôler la courbure de ce fibré. En effet, utilisant la formule de O'Neill, on peut écrire

$$\begin{aligned} K_{M'}(\tilde{X}, \tilde{Y}) &= K_M(X, Y) - \frac{3}{4} |[X, Y]^V|^2 \\ &= K_M(X, Y) - \frac{3}{4} \frac{|d\omega(X, Y)|^2}{|\omega|^2}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

où  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  sont deux vecteurs orthonormés de  $M'$ ,  $X$  et  $Y$  leurs relevés respectifs sur  $M$ , et  $\omega$  la 1-forme induite par l'action de  $T^k$  telle que  $\omega(U) = 1$ . Le lemme 3.8 permet de contrôler le dernier terme en fonction de la courbure de  $M$ , et donc

$$K_{M'}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \geq -a - 2a = -3a. \quad (3.38)$$

Le lemme 3.14 assure alors qu'il existe une constante  $\tau(n, a, d)$  telle que

$$\frac{1}{\tau} \leq |U| \leq \tau. \quad (3.39)$$

Notons  $\tilde{g}$  la métrique invariante sur  $M$  obtenue en modifiant  $g$  dans la direction verticale de sorte que les fibres soient isométriques à  $\pi^{-1}(x_0)$ , et en conservant la distribution horizontale et la métrique horizontale associées à  $g$ . Pour cette nouvelle métrique, la norme de  $U$  est uniformément égale à 1. La relation (3.39) peut s'écrire

$$\frac{1}{\tau^2} \tilde{g}(U, U) \leq g(U, U) \leq \tau^2 \tilde{g}(U, U), \quad (3.40)$$

Par continuité, (3.40) s'étend à n'importe quel vecteur vertical. Comme  $g$  et  $\tilde{g}$  sont identiques sur la direction horizontale, on aura finalement

$$\frac{1}{\tau^2} \tilde{g} \leq g \leq \tau^2 \tilde{g}. \quad (3.41)$$

Pour conclure, remarquons que si la métrique sur  $M$  est telle que les fibres soient isométriques, la fibration  $S^1 \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} (M', g')$  induite par le champ  $U$  est à fibre totalement géodésique. Par continuité, les fibres du fibré  $T^k \hookrightarrow M \rightarrow N$  sont elles aussi totalement géodésiques. ■

### 3.3 Cas général

On va maintenant démontrer le théorème 3.2. Pour ce faire, on va s'inspirer d'une démonstration d'un théorème de Lott ([Lo02], théorème 2), qui utilise les résultats de [CFG92].

Soit  $g$  une métrique sur  $M$  vérifiant les hypothèse du théorème 3.2. Tout d'abord, en utilisant un résultat de régularisation d'Abresch ([CFG92], théorème 1.12), on construit une métrique  $g_1$  sur  $M$  telle que  $\frac{1}{\tau_1}g \leq g_1 \leq \tau_1 g$ ,  $|K(M, g_1)| \leq a$  et  $\|D^i R\| \leq A_i(n, a, \tau_1)$ , où  $\tau_1 > 1$  est un réel fixé, et  $D$  et  $R$  désignent respectivement la dérivée covariante et le tenseur de courbure pour la métrique  $g_1$ .

On applique ensuite le théorème 2.6 de [CFG92], qui assure l'existence de constantes  $\varepsilon_0(n, (N, h))$ ,  $\kappa(n, A)$ ,  $\kappa'(n, A, (N, h))$  et  $\kappa_i(n, A, (N, h))$  et d'une fibration  $\pi' : (M, g_1) \rightarrow (N, h)$  tels que si  $\pi$  est une  $\varepsilon$ -approximation de Hausdorff avec  $\varepsilon < \varepsilon_0(n, (N, h))$ , alors :

- pour tout  $x \in N$ , le diamètre de  $\pi'^{-1}(x)$  pour la métrique  $g'$  est inférieur à  $\kappa\varepsilon$  ;
- la seconde forme fondamentale de la fibre vérifie  $\|II_{\pi^{-1}(x)}\|_\infty \leq \kappa'$  pour tout  $x \in N$  ;
- la submersion  $\pi'$  est  $\kappa_i$ -régulière, c'est-à-dire que  $\|D^i \pi'\|_\infty \leq \kappa_i$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$  ;

Enfin, pour une telle fibration  $\pi'$ , les parties 3 et 4 de [CFG92] donnent la construction d'une métrique  $g_2$  sur  $M$  qui est  $T^k$ -invariante et telle que  $|D^i(g_2 - g_1)| \leq c(n, A, (N, h), i)$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . Cette dernière égalité assure l'existence d'une constante  $\tau_2(n, A, d, (N, h))$  telle que  $\frac{1}{\tau_2}g_1 \leq g_2 \leq \tau_2 g_1$ , et permet aussi de contrôler la courbure pour la métrique  $g_2$ .

On peut alors appliquer la proposition 3.6, qui nous donne une métrique  $g_3$  qui vérifie les points (I) à (III) de la définition 3.1.

Pour obtenir la métrique  $\tilde{g}$  du théorème 3.2, il reste à modifier la distribution horizontale de manière à ce que  $\tilde{g}$  vérifie le point (iv) de la définition 3.1. Remarquons tout d'abord que comme l'application  $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N)$  est linéaire, il suffit de montrer l'égalité  $d\omega = \pi'^*(e(\omega))$  pour une base de  $\mathcal{G}^*$ . Soit  $(\omega_i)$  une base de  $\mathcal{G}^*$  orthonormée pour la métrique  $g_3$ . Pour chaque  $i$ ,  $d\omega_i$  s'écrit

$$d\omega_i = \pi'^*(\alpha_i + d\beta_i), \quad (3.42)$$

où  $\alpha_i$  est une forme harmonique et  $\beta_i$  une forme cofermée. On définit une nouvelle forme verticale  $\omega'_i = \omega_i - \pi'^*(\beta_i)$ . Cette forme vérifie

$$d\omega'_i = d\omega_i - \pi'^*(d\beta_i) = \pi'^*(\alpha_i) \in \mathcal{H}^2(N). \quad (3.43)$$

L'intersection des noyaux des formes  $\omega'_i$  définit une nouvelle distribution horizontale. On définit  $\tilde{g}$  comme étant la métrique sur  $M$  telle que  $\pi' : (M, \tilde{g}) \rightarrow (N, h)$  soit une submersion riemannienne et  $\tilde{g} = g_3$  sur l'espace vertical. Cette métrique vérifie le point (iv) de la définition 3.1 du fait de (3.43).

On doit encore vérifier  $\tilde{g}$  est proche de  $g_3$ . Remarquons que

$$\tilde{g} - g_3 = \sum_i (\omega'^2 - \omega^2) = \sum_i (2\pi'^*(\beta_i) \otimes \omega_i + \pi'^*(\beta_i)^2).$$

Or, B. Colbois et G. Courtois ont montré dans [CC00] (lemme A.32) qu'il existe une constante  $\kappa(n, a, d, (N, h)) > 0$  telle que les formes  $\beta_i$  telles qu'on les a définies vérifient  $\|\beta_i\|_\infty \leq \kappa$ , ce qui permet de conclure. Remarque : le lemme A.32 de [CC00] utilise le fait que pour la métrique  $g_3$ , la norme de la seconde forme fondamentale est contrôlé et que la submersion  $\pi'$  est  $\kappa_i$ -régulière. Il n'est donc pas évident qu'on puisse obtenir le théorème 3.2 en supposant que la métrique initiale  $g$  est invariante et en se passant des résultats de [CFG92].

Enfin, il reste à montrer que la courbure de  $(M, \tilde{g})$  reste bornée dans la direction horizontale. Soit  $x \in N$ ,  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Y}$  deux vecteurs orthonormés tangents à  $N$  en  $x$ ,  $\bar{\omega}$  une 1-forme invariante de  $T^k$ ,  $\omega$  la 1-forme induite sur  $M$  pour la distribution horizontale associée à  $g$  et  $\omega'$  la 1-forme induite pour la distribution associée à  $\tilde{g}$ . Ces deux formes vérifient  $d\omega' = \pi'^*(\alpha)$  et  $d\omega = \pi'^*(\alpha + d\beta)$ , où  $\alpha$  est une 2-forme harmonique de  $N$  et  $\beta$  une 1-forme de  $N$ .

D'après la formule de O'Neill, il suffit pour contrôler la courbure sectionnelle  $K_{(M, \tilde{g})}(\pi'^*(X), \pi'^*(Y))$  de majorer la norme de  $[\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V$ . Or, on peut écrire d'une part,

$$\omega'([\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V) = d\omega'(\pi'^*(X), \pi'^*(Y)) = \alpha(X, Y). \quad (3.44)$$

D'autre part, on a

$$\|\alpha\|_\infty \leq \tau'(N, h)\|\alpha\|_2, \quad (3.45)$$

d'après [Li80] (théorème 7), car  $\alpha$  est harmonique, et

$$\|\alpha\|_2 \leq \|\alpha + d\beta\|_2 = \|d\omega\|_2 \leq \|d\omega\|_\infty, \quad (3.46)$$

en utilisant le fait qu'une forme harmonique est le plus petit élément de sa classe de cohomologie pour la norme  $L^2$ . Enfin, le lemme 3.8 permet de contrôler la norme de  $d\omega$  en fonction de  $a$  et  $\|\omega\|_\infty$ , et la norme de  $\omega$  est contrôlé en fonction de  $\|\omega'\|_\infty$ . Comme la majoration de  $\omega'([\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V)$  obtenue est indépendante du choix de  $\bar{\omega}$ , on a bien une majoration de  $|\pi'^*(X), \pi'^*(Y)]^V|$  en fonction de  $n, a$  et  $d$ . ■

## 4 Formes invariantes et petites valeurs propres

Nous allons ici démontrer le théorème 1.18 énoncés dans l'introduction. Celui-ci s'appuie essentiellement sur le

**Lemme 4.1** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne,  $\varphi_t$  un flot agissant par isométrie sur  $M$  et  $X$  le champ de vecteur associé. On suppose de plus que  $X$  n'est pas uniformément nul.

Soit  $E$  un sous-espace de  $\Omega^*(M)$  stable par le laplacien et par  $(\varphi_t^*)_{t \in \mathbb{R}}$ ,  $\lambda$  une valeur propre du laplacien restreint à  $E$ , et  $E_\lambda$  l'espace propre associé.

S'il existe  $T$  tel que  $\varphi_{t+T}^* = \varphi_t^*$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et que  $\lambda < \left(\frac{2\pi}{T\|X\|_\infty}\right)^2$ , alors  $(\varphi_t^*)_{t \in \mathbb{R}}$  agit trivialement sur  $E_\lambda$ .

**Démonstration du lemme 4.1 :** Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer que  $T = 2\pi$ , le résultat général se déduisant par simple changement de variable. D'autre part, par théorie de Hodge, on peut se restreindre à l'étude des formes cofermées. On supposera donc que  $\lambda$  est une valeur propre de  $\delta d|_{\text{Ker } \delta}$  et  $E_\lambda$  désignera le sous-espace propre associé dans  $\text{Ker } \delta$ .

Soit  $\omega \in E_\lambda$ . On sait que  $\mathcal{L}_X \omega = i_X \circ d\omega + d \circ i_X \omega$ .

D'une part, on a  $\mathcal{L}_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^* \omega - \omega}{t}$ . Puisque  $\varphi_t$  est une isométrie, les formes  $\varphi_t^* \omega$  et  $\frac{\varphi_t^* \omega - \omega}{t}$  sont dans  $\text{Ker } \delta$ , et donc  $\mathcal{L}_X \omega$  aussi car  $\text{Ker } \delta$  est fermé. D'autre part,  $d \circ i_X \omega$  est dans  $\text{Im } d$ .

Comme  $\text{Ker } \delta$  et  $\text{Im } d$  sont orthogonaux, les formes  $\mathcal{L}_X \omega$  et  $d \circ i_X \omega$  sont orthogonales. Le théorème de Pythagore donne donc :

$$\|\mathcal{L}_X \omega\|_2^2 + \|d \circ i_X \omega\|_2^2 = \|i_X \circ d\omega\|_2^2. \quad (4.2)$$

On en déduit

$$\|\mathcal{L}_X \omega\|_2^2 \leq \|i_X \circ d\omega\|_2^2 \leq \|i_X\|^2 \|d\omega\|_2^2 \leq \|i_X\|^2 \lambda \|\omega\|_2^2. \quad (4.3)$$

On va maintenant majorer la norme de  $i_X$  d'une part, et évaluer celle de  $\mathcal{L}_X \omega$  d'autre part.

#### majoration de $\|i_X\|$

On va utiliser le fait que si  $X$  est un champ de vecteur,  $\alpha$  une  $p$ -forme différentielle et  $\beta$  une  $(p+1)$ -forme, alors on a en tout point  $g(X^\flat \wedge \alpha, \beta) = g(\alpha, i_X \beta)$ .

Soit  $\alpha \in \Omega^p(M)$ , on veut calculer  $\|i_X \alpha\|$ . En tout point, on peut écrire :

$$|i_X \alpha|^2 = g(i_X \alpha, i_X \alpha) = g(\alpha, X^\flat \wedge i_X \alpha) \leq |\alpha| \cdot |X^\flat \wedge i_X \alpha| \quad (4.4)$$

et

$$|X^\flat \wedge i_X \alpha|^2 = g(i_X \alpha, i_X (X^\flat \wedge i_X \alpha)) = |X|^2 \cdot |i_X \alpha|^2. \quad (4.5)$$

On en déduit :

$$|i_X \alpha|^2 \leq \|X\|_\infty \cdot |\alpha| \cdot |i_X \alpha| \quad (4.6)$$

et donc

$$\|i_X\| \leq \|X\|_\infty. \quad (4.7)$$



### calcul de $\|\mathcal{L}_X\omega\|$

Comme  $\varphi_t$  est une isométrie,  $\varphi_t^*$  agit par isométrie sur  $E_\lambda$ . Si on suppose que  $t \mapsto \varphi_t$  est  $2\pi$ -périodique,  $\varphi_t$  induit donc un morphisme  $S^1 \rightarrow \text{SO}(E_\lambda)$  qu'on peut décomposer en somme de représentation irréductibles.

Les représentations irréductibles de  $S^1$  sont :

- la représentation triviale  $S^1 \rightarrow \text{SO}(1)$ ,  $t \mapsto \text{Id}$  ;
- les rotations du plan  $S^1 \rightarrow \text{SO}(2)$ ,  $t \mapsto R(kt) = \begin{pmatrix} \cos kt & -\sin kt \\ \sin kt & \cos kt \end{pmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

Supposons maintenant que la décomposition fasse apparaître au moins une rotation. On peut choisir une forme  $\omega \neq 0$  située dans le sous-espace stable associé. On a alors

$$\|\mathcal{L}_X\omega\| = \left\| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi_t^*\omega - \omega}{t} \right\| = |k| \cdot \|\omega\| \geq \|\omega\|. \quad (4.8)$$

Avec (4.3) et (4.7), on en déduit :

$$\|\omega\|^2 \leq \lambda \|X\|_\infty^2 \|\omega\|^2, \quad (4.9)$$

et finalement

$$\lambda \geq \frac{1}{\|X\|_\infty^2}. \quad (4.10)$$

La conclusion du lemme en découle immédiatement. ■

Pour illustrer ce lemme, on va d'abord l'appliquer dans le cas où la fibre est un cercle :

**Théorème 4.11** *Soit  $(M, g)$  un fibré principal en cercle muni d'une métrique  $S^1$ -invariante. On note  $l_0$  le maximum des longueurs des fibres.*

*Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\Delta^p$ . Si  $\lambda < \left(\frac{2\pi}{l_0}\right)^2$ , alors les formes propres associées sont  $S^1$ -invariantes.*

**Démonstration du théorème 4.11 :** C'est une application directe du lemme 4.1 avec  $E = \Omega^p(M)$ , le flot  $\varphi_t$  étant induit par l'action de  $S^1$ . Le champ  $X$  est alors un champ vertical  $S^1$ -invariant.

Si on paramètre  $\varphi_t$  de manière à être  $2\pi$ -périodique, la longueur  $l$  d'une fibre sera égale à  $2\pi|X|$ , la norme de  $X$  ne dépendant pas du point choisi sur la fibre. On a donc

$$|X| = \frac{l}{2\pi} \quad (4.12)$$

et par conséquent

$$\|X\|_\infty = \frac{l_0}{2\pi}. \quad (4.13)$$

Si  $\lambda < \left(\frac{2\pi}{l_0}\right)^2$ , alors  $\lambda < \frac{1}{\|X\|_\infty^2}$  et donc les formes propres de  $E_\lambda$  sont  $S^1$ -invariantes. ■

On va maintenant démontrer le cas général.

**Démonstration du théorème 1.18 :** Remarquons tout d'abord que dans la démonstration du théorème 4.11, la décomposition de  $\Omega^p(M)$  en éléments irréductibles est une décomposition en série de Fourier par rapport à la fibre  $S^1$ , la représentation triviale et les représentations  $\theta \mapsto R(k\theta)$  correspondant respectivement aux fonctions constantes et aux fonctions  $\frac{2\pi}{k}$ -périodiques du cercle. On va reprendre cette idée et l'appliquer au tore  $T^k$  pour décomposer  $\Omega^p(M)$  en somme en sous-espaces de formes invariantes dans une direction et périodiques dans une autre pour ensuite appliquer le lemme 4.1 à ces sous-espaces.

Plus précisément, si on pose  $T^k = \mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k$ ,  $\mathbb{R}^k$  étant muni d'une métrique euclidienne (pas nécessairement la métrique euclidienne canonique), et si  $\Gamma$  est le réseau dual de  $\mathbb{Z}^k$ ,  $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{R}^k, \langle \gamma, \gamma' \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \gamma' \in \mathbb{Z}^k\}$ , une base des fonctions propres de  $T^k$  est donnée par  $f_\gamma = \cos(2\pi\langle \gamma, x \rangle)$  et  $g_\gamma = \sin(2\pi\langle \gamma, x \rangle)$ ,  $\gamma \in \Gamma$  (voir par exemple [GHL87], p. 200). Si on note  $\gamma^\perp$  l'orthogonal de  $\gamma$  dans  $\mathbb{R}^k$ , les fonctions  $f_\gamma$  et  $g_\gamma$  sont invariantes sous l'action de  $\gamma^\perp$ . On peut remarquer que, si  $\Gamma$  dépend de la métrique choisie sur  $\mathbb{R}^k$ , ce n'est pas le cas de l'ensemble des  $\gamma_{\gamma \neq 0}^\perp$ . En effet, c'est l'ensemble des hyperplans vectoriels de  $\mathbb{R}^k$  engendrés par des éléments de  $\mathbb{Z}^k$ . Notons  $A$  cet ensemble. En regroupant les fonctions propres en fonction de leur direction invariante, on obtient la décomposition

$$C^\infty(T^k) = \overline{\bigoplus_{V \in A} C^\infty(T^k)^V} \oplus \mathbb{R} \quad (4.14)$$

où  $\mathbb{R}$  représente les fonctions constantes, et où  $C^\infty(T^k)^V$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  d'intégrale nulle (c'est-à-dire orthogonales aux fonctions constantes) et invariantes dans la direction  $V$ . Par construction, chaque  $C^\infty(T^k)^V$  est invariant par  $\Delta$  et par l'action de  $T^k$ .

De la même façon,  $\Omega^p(M)$  peut s'écrire

$$\Omega^p(M) = \overline{\bigoplus_{V \in A} \Omega^p(M)^V} \oplus \Omega^p(M)^{T^k}, \quad (4.15)$$

où  $\Omega^p(M)^{T^k}$  est l'espace des  $p$ -formes  $T^k$ -invariantes et  $\Omega^p(M)^V$  l'espace des  $p$ -formes différentielles invariantes par l'action de  $V$  et orthogonales à  $\Omega^p(M)^{T^k}$ . Comme  $V$  ne dépend pas de la métrique sur chaque fibre, chacun des  $\Omega^p(M)^V$  est bien défini, et sera de plus invariant par  $\Delta$  et par l'action de  $T^k$ . On a ainsi partiellement décomposé les formes différentielles de  $M$  en série de Fourier par rapport à la fibre.

Soit  $V \in A$ ,  $\lambda_M^V$  une valeur propre du laplacien restreint à  $\Omega^p(M)^V$  et  $\lambda_{T^k}^V$  la première valeur propre de  $\Omega^p(T^k)^V$  (remarque : elle est non nulle car les formes harmoniques du tore plat sont les formes invariantes). On choisit sur  $T^k$  un champ invariant  $X_{T^k}$  orthogonal à  $V$  et on note  $X_M$  le champ vertical

sur  $M$  induit par  $X_{T^k}$ . L'action sur  $\Omega^p(M)^V$  du flot  $\varphi_t$  associé à  $X_M$  est périodique, et si on note  $T$  sa période,  $\lambda_{T^k}^V$  est par construction exactement  $\left(\frac{2\pi}{T\|X_{T^k}\|_\infty}\right)^2$ . D'autre part, comme  $\bar{g}_x \leq f(x) \cdot \bar{g}$ , les normes de  $\|X_{T^k}\|_\infty$  et  $\|X_M\|_\infty$  sont liés :

$$\|X_M\|_\infty \leq (\sup_B f)^{1/2} \cdot \|X_{T^k}\|_\infty, \quad (4.16)$$

donc si  $\lambda_M^V < (\sup_B f)^{-1} \lambda_{T^k}^V$ , alors

$$\lambda_M^V < (\sup_B f)^{-1} \left(\frac{2\pi}{T\|X_{T^k}\|_\infty}\right)^2 \leq \left(\frac{2\pi}{T\|X_M\|_\infty}\right)^2, \quad (4.17)$$

et le lemme 4.1 s'applique avec  $E = \Omega^p(M)^V$  et les formes propres associées à  $\lambda_M^V$  sont  $\varphi_t^*$ -invariantes, donc  $T^k$ -invariantes.

Si  $\lambda_M$  est une valeur propre du laplacien agissant sur  $\Omega^p(M)$  et que  $\lambda$  est strictement inférieure à la première valeur propre de  $T^k$ , alors elle sera *a fortiori* inférieure à tous les  $\lambda_{T^k}^V$  et donc les formes propres de  $\lambda_M^V$  dans  $\Omega^p(M)^V$  sont  $T^k$ -invariantes. Comme les  $\Omega^p(M)^V$  sont stables par le laplacien, l'espace propre de  $\lambda_M$  est la somme des espaces propres restreints aux  $\Omega^p(M)^V$ . Par conséquent, toutes les formes propres associées à  $\lambda_M$  sont  $T^k$ -invariantes. ■

**Démonstration de la remarque 1.21 :** Il suffit de remarquer que dans le lemme 4.1, si la dimension du sous-espace propre  $E_\lambda$  est impaire, la décomposition de cet espace en espace de représentations irréductibles contient nécessairement une représentation triviale, et donc  $E_\lambda$  contient des formes invariantes par  $\varphi_t$ . Dans le cas du théorème 4.11, les espaces propres de dimension impaire du laplacien agissant sur  $\Omega^*(M)$  contiennent donc des formes  $S^1$ -invariantes.

Dans le cas du théorème 1.18, si un espace propre du laplacien est de dimension impaire, l'un des éléments de la décomposition de Fourier de cet espace sera aussi de dimension impaire, et la remarque précédente s'applique. ■

## 5 Petites valeurs propres et rayon d'injectivité

Nous allons maintenant démontrer le théorème 1.3. Le cas  $k = 1$  découlant de [CC00], nous supposons  $k \geq 2$ . Soit  $N$  une variété telle que  $b_2(N) \geq k$ . On définit un fibré principal en tores  $M$  sur  $N$  par la donnée d'une application  $e : \mathcal{G}^* \rightarrow H^2(N)$  qu'on supposera injective (c'est possible car  $b_2(N) \geq k$ ).

On se donne sur  $M$  et  $N$  des métriques  $g$  et  $h$  telles que le couple  $(g, h)$  soit adapté (au sens défini en 3.1) à la fibration  $M \rightarrow N$  et que la restriction

$\bar{g}$  de la métrique  $g$  à la fibre  $T^k$  soit le passage au quotient de la métrique canonique de  $\mathbb{R}^k$  à  $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$  (on a vu dans la section précédente que le fait que les fibres soient totalement géodésiques est équivalent au fait qu'elles soient isométriques entre elles). On va construire la famille de métrique  $(g_\varepsilon)$  sur  $M$  en faisant varier la métrique  $g_\varepsilon$  le long de la fibre, la connexion et la composante horizontale de la métrique restant identique à celles de  $g$ .

Soit  $y \in \mathbb{R}^{k-1}$  un  $(k-1)$ -uplet difficilement approchable, c'est-à-dire tel qu'il existe une constante  $c(y)$  telle que pour tout  $p \in \mathbb{Z}^{k-1}$  et tout  $q \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\|p - qy\|^{k-1}|q| \geq c(y), \quad (5.1)$$

la norme considérée étant la norme euclidienne canonique. On sait qu'il existe une infinité non dénombrable de tels  $(k-1)$ -uplet (voir [Sc80] p. 22, 41–43). On se donne une base orthonormée  $(X_1, \dots, X_k)$  de  $\mathbb{R}^k$  telle que  $X_1$  soit colinéaire au vecteur  $(1, y)$ . Pour tout  $\varepsilon$ , on se donne la base  $\mathcal{B}_\varepsilon = (\frac{1}{\varepsilon}X_1, X_2, \dots, X_k)$  et on définit la métrique  $\bar{g}_\varepsilon$  sur  $\mathbb{R}^k$  en posant que  $\mathcal{B}_\varepsilon$  est orthonormée pour  $\bar{g}_\varepsilon$ , c'est-à-dire qu'on obtient  $\bar{g}_\varepsilon$  en contractant les longueurs d'un rapport  $\varepsilon$  dans la direction de  $X_1$ . Le passage de  $\bar{g}_\varepsilon$  au quotient  $\mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$  détermine une métrique sur  $T^k$ , qui elle-même induit la métrique  $(g_\varepsilon)$  sur  $M$ . On a en particulier  $g_1 = g$ . Les résultats classiques sur les effondrements ([Ca84], [CG86] théorème 2.1) assure que la courbure de  $(M, g_\varepsilon)$  reste bornée quand  $\varepsilon$  tend vers zéro.

On va montrer l'inégalité 1.4 du théorème 1.3 en estimant successivement le volume, le rayon d'injectivité et la première valeur propre de  $M$  en fonction de  $\varepsilon$ .

**Fait 5.2** *Pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1]$ , on a  $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \text{Vol}(N, h) \cdot \varepsilon$ .*

**Démonstration :** Il suffit de remarquer que  $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \text{Vol}(N, h) \cdot \text{Vol}(T^k, \bar{g}_\varepsilon)$ , et que  $\text{Vol}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) = \text{Det}_{\mathcal{B}_\varepsilon} \mathcal{B}_1 = \varepsilon$ . ■

Pour obtenir le théorème 1.3, on aura à reparamétriser  $g_\varepsilon$  de sorte que  $\text{Vol}(M, g_\varepsilon) = \varepsilon$ .

**Fait 5.3** *Il existe des constantes  $\varepsilon_0(y, k) > 0$  et  $C(y, k) > 0$  telle que  $\text{inrad}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) \geq C \cdot \varepsilon^{\frac{1}{k}}$  pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$ .*

**Démonstration :** Calculer le rayon d'injectivité de  $(T^k, \bar{g}_\varepsilon)$  revient à calculer le minimum des normes dans  $\mathbb{R}^k$  des points non nuls du réseau  $\mathbb{Z}^k$  pour la métrique  $\bar{g}_\varepsilon$ . Plus précisément, on peut écrire

$$2 \text{inrad}(T^k, \bar{g}_\varepsilon) = \min_{(p,q) \in \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z} \setminus (0,0)} \|(p, q)\|_{\bar{g}_\varepsilon} \quad (5.4)$$

Soit  $(p, q) \in \mathbb{Z}^{k-1} \times \mathbb{Z} \setminus (0, 0)$ . On note  $z$  la projection orthogonale de  $(p, q)$  sur la droite vectorielle  $D$  engendrée par  $X_1$  (remarque : elle ne dépend pas de  $\varepsilon$ ),  $\theta$  l'angle entre  $D$  et l'hyperplan  $\mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$  pour la métrique canonique

(on a  $\tan \theta = \|y\|^{-1}$ ) et  $\theta'$  l'angle entre  $D$  et le vecteur  $(p, q) - (q \cdot y, q)$  (voir figure 1). De plus, on notera  $\|\cdot\|_{\bar{g}_\varepsilon}$  la norme pour la métrique  $g_\varepsilon$  et  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne canonique. On peut écrire :

$$\|(p, q)\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 = \|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 + \|z\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2. \quad (5.5)$$

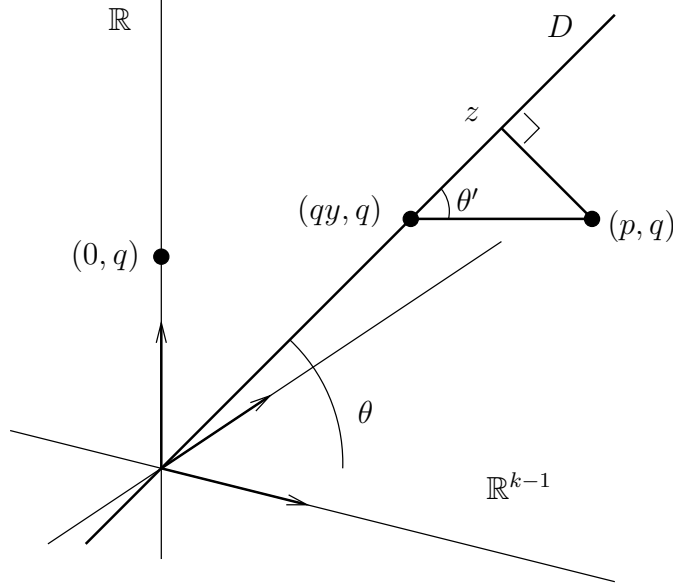


FIG. 1 -

Le vecteur  $(p, q) - z$  est orthogonal à  $D$ , donc la norme  $\|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon}$  est indépendante de  $\varepsilon$ . On a donc, en utilisant la relation (5.1) :

$$\|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon} = \|(p, q) - z\| = \sin \theta' \|p - qy\| \geq \frac{\sin \theta' \cdot c(y)^{\frac{1}{k-1}}}{|q|^{\frac{1}{k-1}}}. \quad (5.6)$$

Comme  $\theta \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2}$  on en déduit

$$\|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon}^2 \geq \frac{a}{|q|^{\frac{2}{k-1}}} \quad (5.7)$$

où  $a$  est une constante ne dépendant que de  $k$  et  $y$ .

Le vecteur  $z$  est parallèle à  $D$ , donc  $\|z\|_{\bar{g}_\varepsilon} = \varepsilon \|z\|$ . De plus, on a

$$\|z\| \geq \|(q, qy)\| - \|z - (q, qy)\| \geq \frac{\|qy\|}{\cos \theta} - \|z - (q, qy)\|. \quad (5.8)$$

On peut supposer que  $\|z - (q, qy)\| \leq \frac{\|qy\|}{2 \cos \theta}$ . En effet, dans le cas contraire, on a  $\|(p, q) - z\|_{\bar{g}_\varepsilon} \geq \sin \theta \|p - qy\| \geq \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta} \|qy\| \geq \frac{q}{2}$ , ce qui signifie si  $q \neq 0$  que

$\|(p, q)\|_{\tilde{g}_\varepsilon}^2$  est minoré par  $\frac{1}{2}$  et donc ne réalise pas le minimum en (5.4) quand  $\varepsilon$  est suffisamment petit (si  $q = 0$ , c'est  $\sin \theta \|p - qy\|$  qui est uniformément minoré). On obtient finalement la minoration

$$\|z\|_{\tilde{g}_\varepsilon}^2 \geq \varepsilon^2 \frac{\|qy\|^2}{4 \cos^2 \theta} = \varepsilon^2 b q^2, \quad (5.9)$$

où  $b$  est une constante qui ne dépend que de  $y$ , et donc

$$\|(p, q)\|_{\tilde{g}_\varepsilon}^2 \geq \frac{a}{|q|^{\frac{2}{k-1}}} + \varepsilon^2 b q^2. \quad (5.10)$$

La fonction  $f : t \rightarrow at^{-\frac{2}{k-1}} + \varepsilon^2 b t^2$  admet sur  $\mathbb{R}_+^*$  un unique minimum en  $t = \left(\frac{a}{\varepsilon^2 b(k-1)}\right)^{\frac{k-1}{2k}}$  dont la valeur est  $\varepsilon^2 a^{\frac{k-1}{k}} b^{\frac{1}{k}} ((k-1)^{\frac{1}{k}} + (k-1)^{\frac{1-k}{k}})$ . On peut donc en déduire que

$$\|(p, q)\|_{\tilde{g}_\varepsilon} \geq C \varepsilon^{\frac{1}{k}} \quad (5.11)$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $y$  et  $k$ . ■

Remarque : Comme la fibre est totalement géodésique, son rayon d'injectivité est égal au rayon d'injectivité de  $M$  si  $\varepsilon$  est suffisamment petit.

**Fait 5.12** *Il existe une constante  $C'(N, k, e) > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon$ , on a  $\lambda_{p,1}(M, g_\varepsilon) \leq C' \cdot \varepsilon^2$  pour  $p = 1$  et 2.*

**Démonstration :** Commençons par le cas  $p = 1$ . Pour estimer la première valeur propre non nulle, on va d'abord calculer quelles sont les 1-formes harmoniques. On sait déjà d'après les résultats de la section précédente que les formes harmoniques sont  $T^k$ -invariantes. Soit  $\varphi$  une 1-forme différentielle  $T^k$ -invariante de  $M$ . On peut écrire

$$\varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^k \pi^*(a_i) \cdot \omega_i, \quad (5.13)$$

où  $\alpha$  est une 1-forme de  $N$ ,  $a_i$  des fonctions de  $N$  et  $\omega_i$  les 1-formes verticales induites par une base orthonormée de  $\mathcal{G}^*$ . On a alors :

$$d\varphi = \pi^*(d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i) + \sum_{i=1}^k d\pi^*(a_i) \wedge \omega_i, \quad (5.14)$$

où  $e_i$  désigne l'image de  $\omega_i$  par l'application  $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N)$ . De plus, pour tout  $i$  on a

$$\begin{aligned} \|\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)\|^2 &= (\delta(\pi^*(a_i)\omega_i), \delta(\pi^*(a_i)\omega_i)) \\ &= (\pi^*(a_i)\omega_i, d\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)), \end{aligned} \quad (5.15)$$

où  $(\cdot, \cdot)$  désigne le produit scalaire  $L^2$ . Comme  $\pi^*(a_i)\omega_i$  est une forme  $T^k$ -invariante,  $\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)$  est une fonction invariante, c'est-à-dire que c'est le relevé d'une fonction sur  $N$ . Par conséquent,  $d\delta(\pi^*(a_i)\omega_i)$  est le relevé d'une 1-forme sur  $N$ , et est donc orthogonale à  $\pi^*(a_i)\omega_i$ . Finalement, on a :

$$\delta\varphi = \pi^*(\delta\alpha). \quad (5.16)$$

Si  $\varphi$  est harmonique, on a  $d\varphi = 0$  et  $\delta\varphi = 0$ , donc

$$\delta\alpha = 0, \quad da_i = 0 \text{ pour tout } i, \text{ et } d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0. \quad (5.17)$$

Comme les fonctions  $a_i$  sont constantes,  $\sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i$  est une 2-forme harmonique de  $N$ , donc orthogonale à la forme exacte  $d\alpha$ . On a donc  $\Delta\alpha = 0$  et  $\sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0$ . Comme  $e$  est injective, les  $e_i$  forment une famille libre, et donc  $a_i = 0$  pour tout  $i$ . On obtient finalement que les 1-formes harmoniques de  $M$  sont les relevés des 1-formes harmoniques de  $N$ .

Pour majorer la première valeur propre non nulle du laplacien, il suffit de calculer le quotient de Rayleigh pour la métrique  $g_\varepsilon$  d'une 1-forme orthogonale aux formes harmoniques. En notant  $(\omega_i)$  les 1-formes verticales induites par la base duale de  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , on choisit comme forme test  $\varepsilon^{-1}\omega_1$ . On vient de voir que la codifférentielle d'une telle forme est nulle, donc on peut écrire

$$R(\varepsilon^{-1}\omega_1) = \frac{\|d(\varepsilon^{-1}\omega_1)\|_{g_\varepsilon}^2}{\|\varepsilon^{-1}\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2}. \quad (5.18)$$

La forme  $\varepsilon^{-1}\omega_1$  est indépendante de  $\varepsilon$ , donc  $d(\varepsilon^{-1}\omega_1)$  aussi, et comme de plus elle est horizontale donc sa norme ne dépend pas de  $\varepsilon$ . Par ailleurs,  $\|\varepsilon^{-1}\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2 = \varepsilon^{-1}\|\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2 = \varepsilon^{-2}$ . Comme  $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon) \leq R(\varepsilon^{-1}\omega_1)$ , on en déduit que  $\lambda_{1,1}(M, g_\varepsilon) \leq C' \cdot \varepsilon^2$ , où  $C'$  est une constante dépendant des choix de  $N$ ,  $k$  et  $e$ .

Le cas  $p = 2$  se déduit du premier par la théorie de Hodge, en remarquant que dans le cas  $p = 1$  on a trouvé une petite valeur propre du laplacien retreint aux formes cofermées. ■

**Fait 5.19** *Si  $b_1(N) > b_2(M)$ , alors il existe une constante  $C''(N, k, e) > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon$ , on a  $\lambda_{p, b_1(N) - b_2(M)}(M, g_\varepsilon) \leq C'' \cdot \varepsilon^2$  pour  $p = 2$  et  $3$ .*

**Démonstration :** On va se restreindre une nouvelle fois aux formes cofermées pour montrer le résultat pour  $p = 2$  et ensuite en déduire le cas  $p = 3$ .

Contrairement au cas des 1-formes, on a pas en général de moyen simple de déterminer quelles sont les 2-formes harmoniques (on rencontre la même difficulté dans l'étude du spectre des fibrés en cercles, voir [CC00]). On va

majorer le quotient de Rayleigh sur un espace test de dimension  $b_1(N)$ , et la condition  $b_1(N) > b_2(M)$  assurera qu'on a bien majoré une ou plusieurs valeurs propres non nulles.

En notant toujours  $(\omega_i)$  les 1-formes verticales induites par la base duale de  $\mathcal{B}_\varepsilon$  on considère une forme différentielle  $\varphi = \omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)$ , où  $\alpha$  est une 1-forme harmonique de  $N$ . Son quotient de Rayleigh est

$$R(\varphi) = \frac{\|d(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2 + \|\delta(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2}{\|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2} \quad (5.20)$$

La forme  $\varphi$  est cofermée. En effet, si on calcule la différentielle de sa forme duale, on obtient :

$$\begin{aligned} d * (\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)) &= d\left(\bigwedge_{i \neq 1} \omega_i\right) \wedge \pi^*(\alpha) \\ &= \sum_{i \neq 1} (-1)^i \bigwedge_{j \neq 1, i} \omega_j \wedge \pi^*(e(\omega_i)) \wedge \pi^*(\alpha) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Comme  $\pi^*(e(\omega_i)) \wedge \pi^*(\alpha) = \pi^*(e(\omega_i) \wedge \alpha)$  et que  $e(\omega_i) \wedge \alpha$  est de degré supérieur à la dimension de  $N$ , on en déduit que tous les termes de la somme sont nuls. On est ramené à :

$$R(\varphi) = \frac{\|d(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2}{\|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2}. \quad (5.22)$$

On a d'une part  $|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)|_{g_\varepsilon}^2 = |\omega_1|_{g_\varepsilon}^2 |\pi^*(\alpha)|_{g_\varepsilon}^2 = |\alpha|^2$  et donc

$$\|\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2 = \|\alpha\|^2, \quad (5.23)$$

et d'autre part

$$\|d(\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha))\|_{g_\varepsilon}^2 = \|d\omega_1 \wedge \pi^*(\alpha)\|_{g_\varepsilon}^2 \leq \|d\omega_1\|_{g_\varepsilon}^2 \|\alpha\|^2. \quad (5.24)$$

On voit finalement que  $R(\varphi) \leq R(\omega_1)$  quel que soit  $\alpha$ . La majoration de  $R(\omega_1)$  obtenue précédemment permet de conclure. ■

On va maintenant donner des exemples de fibrés pour lesquels la condition  $b_1(N) > b_2(M)$  est bien vérifiée.

**Exemple 5.25** On considère pour tout entier  $k$  la variété  $M = (S^3)^k \times S^1$ . la fibration de Hopf  $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$  induit une action libre de  $T^k = (S^1)^k$  sur  $(S^3)^k$ , et permet donc de définir une fibration principale  $T^k \hookrightarrow M \rightarrow N$ , où  $N = (S^2)^k \times S^1$ . La classe d'Euler  $e$  de ce fibré est bien injective : l'image de  $e$  est engendrée par les relevés à  $M$  de chacune des classes d'Euler correspondant aux fibrations de Hopf qui sont bien linéairement indépendants. Enfin, la formule de Künneth permet de calculer aisément les nombres de Betti des produits  $M$  et  $N$ , on obtient en particulier  $b_1(N) = 1$  et  $b_2(M) = 0$ . ■



**Remarque 5.26** Dans l'exemple précédent, les métriques sur  $M$  et  $N$  ne sont *a priori* pas des métriques produits. On ne peut donc pas déduire directement les propriétés du spectre de la formule de Künneth.

Il reste enfin à démontrer que corollaire 1.8.

**Démonstration :**

Cas  $n = 5$  : On considère une variété compacte  $N$  de dimension 3 telle que  $b_2(N) \geq 2$  et on choisit pour  $M$  un fibré principal en tore  $T^2$  sur  $N$  dont la classe d'Euler est injective. Les résultats précédents assure l'existence d'un effondrement tel que  $\lambda_{p,1}(M) \leq C \cdot \text{injad}(M)^4$  pour  $p$  égal à 1 et 2. Par dualité de Hodge, on a la même inégalité pour  $n - 1$  et  $n - 2$ , donc pour tout  $p$  entre 1 et  $n - 1$ .

Cas  $n = 7$  : On peut vérifier que le fibré construit dans l'exemple 5.25 pour  $k = 2$  convient. On sait déjà que  $\lambda_{p,1}(M) \leq C \cdot \text{injad}(M)^4$  pour  $p = 1, 2$  et 3, et la dualité de Hodge donne l'inégalité pour  $p = 4, 5$  et 6. ■

## 6 Minoration du spectre des fibrés principaux en tore

### 6.1 Minoration de la première valeur propre des 1-formes

Les résultats des sections 2 à 4 nous permettent de démontrer le théorème 1.10. On a vu qu'on pouvait se ramener au cas d'un fibré muni d'une métrique adaptée. On va donc montrer le résultat du théorème 1.10 pour un fibré vérifiant les conclusions du théorème 3.2 :

**Théorème 6.1** *Soit  $a > 0, d > 0$  deux réels,  $n, k$  et  $m$  trois entiers tels que  $n = k + m$ , et  $(N^m, h)$  une variété riemannienne. Il existe des constantes  $c(n, a, d, (N, h))$  et  $\varepsilon(n, a, d, (N, h))$  strictement positives telles que si  $\bar{g}$  est une métrique sur le tore  $T^k$  telle que  $\text{diam}(T^k) < \varepsilon$  et si  $T^k \hookrightarrow M^n \rightarrow N$  est un fibré principal muni d'un couple de métriques  $(g, h)$  adapté au fibré et tel que  $g = \bar{g}$  en restriction à la fibre,  $\text{diam}(M, g) < d$  et  $|K_M(X, Y)| \leq a$  pour toute paire  $(X, Y)$  de vecteurs horizontaux orthonormés, alors on a*

$$\lambda_{1,1}(M, g) \geq c \cdot \text{Vol}^2(T^k).$$

On s'est ici donné comme hypothèse que la métrique sur  $N$  est fixée. En effet, une hypothèse sur la courbure ne nous sera pas suffisante. On verra au paragraphe suivant dans quelle mesure on peut espérer obtenir le même résultat avec des hypothèses plus faibles. Par ailleurs la minoration du spectre en fonction du rayon d'injectivité découle du fait que le rayon d'injectivité de  $M$  est égal à celui de la fibre si  $\varepsilon$  est suffisamment petit (la fibre étant totalement géodésique) et que, la restriction de la métrique à la fibre étant plate, on a  $\text{Vol}(T^k) \geq C \text{injad}(T^k)$  où  $C$  ne dépend que de  $k$ .

**Démonstration du théorème 6.1 :**

Dans un premier temps, nous allons démontrer le théorème dans le cas où le fibré  $M$  ne contient pas de sous-fibré trivial, c'est-à-dire quand l'application  $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N, h)$  est injective. Nous généraliserons ensuite le résultat à un fibré principal quelconque. D'autre part, on se restreindra aux formes  $T^k$ -invariantes, en vertu des résultats du chapitre 4 (corollaire 1.18). En effet, le spectre des formes orthogonales aux formes invariantes sera minoré en fonction de la constante  $\varepsilon$  du théorème, et on pourra toujours choisir cette constante suffisamment petite de sorte que le spectre des formes orthogonales aux formes invariantes soit plus grand que le terme  $c \cdot \text{Vol}^2(T^k)$ .

Supposons donc  $e$  injective. La démonstration se déroule en deux étapes. D'abord, on se ramène à l'étude des valeurs propres de l'opérateur  $e^*e$ , l'adjoint étant défini en munissant  $\mathcal{H}^2(N)$  de sa norme  $L^2$  :

**Fait 6.2** *Il existe  $\varepsilon(n, a, \lambda_{0,1}(N, h), \lambda_{1,1}(N, h)) > 0$  et  $c(n, a, \lambda_{0,1}(N, h)) > 0$  tel que pour toute 1-forme  $\varphi$  sur  $M$   $T^k$ -invariante et orthogonale à  $\text{Ker } \Delta^1(M, g)$ , si le quotient de Rayleigh de  $\varphi$  vérifie  $R(\varphi) < \varepsilon$ , alors il existe une forme  $\omega$  induite par un élément de  $\mathcal{G}^*$  telle que  $\|e(\omega)\|^2 \leq c \cdot \varepsilon \|\omega\|^2$ .*

**Démonstration :** Soit  $\varphi$  une 1-forme différentielle  $T^k$ -invariante de  $M$ . On peut comme dans la section précédente écrire  $\varphi$  sous la forme

$$\varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^k \pi^*(a_i) \cdot \omega_i, \quad (6.3)$$

où  $\alpha$  est une 1-forme de  $N$ ,  $a_i$  des fonctions de  $N$  et  $\omega_i$  les 1-formes verticales induites par une base orthonormée de  $\mathcal{G}^*$ . On a alors :

$$d\varphi = \pi^*(d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i) + \sum_{i=1}^k d\pi^*(a_i) \wedge \omega_i, \quad (6.4)$$

où  $e_i$  désigne l'image de  $\omega_i$  par l'application  $e : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^2(N)$ . On a vu de plus dans la démonstration du fait 5.12 que  $\varphi$  vérifie

$$\delta\varphi = \pi^*(\delta\alpha), \quad (6.5)$$

et que le fait que  $e$  soit injectif implique que les 1-formes harmoniques de  $M$  sont exactement les relevés des 1-formes harmoniques de  $N$ .

Supposons que  $\varphi$  est de norme 1, c'est-à-dire que  $\|\alpha\|^2 + \sum_{i=1}^k \|a_i\|^2 = 1$ , et qu'elle est orthogonale aux formes harmoniques de  $M$ . Le quotient de Rayleigh de  $\varphi$  s'écrit alors

$$R(\varphi) = \|\delta\alpha\|^2 + \|d\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i\|^2 + \sum_{i=1}^k \|d\pi^*(a_i)\|^2. \quad (6.6)$$

Supposons que  $R(\varphi) < \varepsilon$  pour un  $\varepsilon > 0$  donné. On a en particulier  $\|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i\|^2 < \varepsilon$ . Pour tout  $i$ , notons  $\bar{a}_i$  la valeur moyenne de la fonction  $a_i$ . On peut alors écrire

$$\|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i + \sum_{i=1}^k (a_i - \bar{a}_i) \cdot e_i\|^2 < \varepsilon. \quad (6.7)$$

L'inégalité triangulaire nous donne alors :

$$\|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i\| < \|\sum_{i=1}^k (a_i - \bar{a}_i) \cdot e_i\| + \sqrt{\varepsilon}. \quad (6.8)$$

Comme les fonctions  $(a_i - \bar{a}_i)$  sont de moyennes nulles, leur quotient de Rayleigh est supérieur à  $\lambda_{0,1}(N, h)$ , et donc  $\|a_i - \bar{a}_i\|^2 \leq \frac{\|\mathrm{d}a_i\|^2}{\lambda_{0,1}(N, h)} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_{0,1}(N, h)}$ . Par ailleurs, la forme exacte  $\mathrm{d}\alpha$  est orthogonale à la forme harmonique  $\sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i$ . On a donc finalement

$$\begin{aligned} \|\sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i\|^2 &\leq \|\mathrm{d}\alpha + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i\|^2 \\ &\leq (\|\sum_{i=1}^k (a_i - \bar{a}_i) \cdot e_i\| + \sqrt{\varepsilon})^2 \\ &\leq (\sum_{i=1}^k (\|a_i - \bar{a}_i\| \cdot \|e_i\|_\infty) + \sqrt{\varepsilon})^2 \\ &\leq \varepsilon \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^k \|e_i\|_\infty}{\sqrt{\lambda_{0,1}(N, h)}} \right)^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Le lemme 3.8 permet d'obtenir une majoration de  $\|\sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i\|^2$  en fonction de  $n$ ,  $\lambda_{0,1}(N, h)$  et d'une borne sur la courbure de  $(M, g)$ .

Pour tout  $i$ , la fonction  $a_i - \bar{a}_i$  est orthogonale à  $\bar{a}_i$ , donc

$$\|\alpha\|^2 + \sum_{i=1}^k (\|\bar{a}_i\|^2 + \|a_i - \bar{a}_i\|^2) = 1. \quad (6.10)$$

D'une part, on a déjà vu que chaque terme  $\|a_i - \bar{a}_i\|^2$  est majoré par  $\frac{\varepsilon}{\lambda_{0,1}(N, h)}$ . D'autre part, comme  $\varphi$  est orthogonale aux relevés des formes harmoniques de  $(N, h)$ ,  $\alpha$  est elle-même orthogonale aux formes harmoniques de  $N$ . On peut donc écrire

$$\|\alpha\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{1,1}(N, h)} (\|\mathrm{d}\alpha\|^2 + \|\delta\alpha\|^2). \quad (6.11)$$

Le terme  $\|\delta\alpha\|^2$  est majoré par  $R(\varphi)$ , donc par  $\varepsilon$ , et  $\|d\alpha\|^2$  est majoré en fonction de  $a$ ,  $n$  et  $\lambda_{0,1}(N, h)$  comme dans l'inégalité 6.9. Il découle donc de l'équation (6.10) :

$$\sum_{i=1}^k \|\bar{a}_i\|^2 \geq 1 - \tau(n, a, \lambda_{0,1}(N, h), \lambda_{1,1}(N, h))\varepsilon. \quad (6.12)$$

Si on prend pour  $\omega$  la 1-forme  $\sum_{i=1}^k \bar{a}_i \omega_i$ , on a

$$\frac{\|e(\omega)\|^2}{\|\omega\|^2} = \frac{\|\sum_{i=1}^k \bar{a}_i \cdot e_i\|^2}{\sum_{i=1}^k \|\bar{a}_i\|^2} \quad (6.13)$$

Selon (6.12), le dénominateur est supérieur à  $\frac{1}{2}$  si  $\varepsilon$  est suffisamment petit. La majoration du numérateur fournie par (6.9) donne alors le résultat souhaité. ■

On va maintenant minorer le spectre de  $e^*e$  en fonction du volume de la fibre  $T^k$ .

**Fait 6.14** *Il existe une constante  $c(n, a, (N, h)) > 0$  telle que la première valeur propre de  $e^*e$  soit minorée par  $c \cdot \text{Vol}(T^k)^2$ .*

**Démonstration :** Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres de  $e^*e$  classées dans l'ordre croissant. Comme  $e$  est injective, ces valeurs propres sont non nulles et la première vérifie

$$\lambda_1 = \frac{\prod_i \lambda_i}{\prod_{i \neq 1} \lambda_i} = \frac{\text{Det}(e^*e)}{\prod_{i \neq 1} \lambda_i}. \quad (6.15)$$

Par ailleurs, les valeurs propres de  $e^*e$  vérifient  $\lambda_i \leq \|e^*e\|$ , donc

$$\lambda_1 \geq \frac{\text{Det}(e^*e)}{\|e^*e\|^{k-1}} \geq \frac{\text{Det}(e^*e)}{\|e\|^{2k-2}}. \quad (6.16)$$

L'image de  $e$  est un sous-espace de  $\text{Ker } \Delta^2(N)$  de dimension  $k$ , engendré par un sous-réseau du réseau des formes harmoniques entières de  $N$ . Si on restreint  $e$  et  $e^*$  à ce sous-espace, on peut écrire  $\text{Det}(e^*e) = (\text{Det } e)^2$ , où  $\text{Det } e$  est le déterminant d'une matrice de  $e$  écrite dans des bases orthonormées de  $\mathcal{G}^*$  et  $\text{Im } e$ , ce qui donne

$$\lambda_1 \geq \frac{(\text{Det } e)^2}{\|e\|^{2k-2}}. \quad (6.17)$$

Le lemme 3.8 donne une majoration de  $\|e\|$  en fonction de  $n$  et de la borne  $a$  sur la courbure de  $M$ , il ne reste donc qu'à minorer  $\text{Det } e$ . Notons  $\text{Det}' e$  le déterminant de la matrice de  $e$  dans la base canonique de  $\mathcal{G}^* = \mathbb{R}^{k^*}$  et une base orthonormée de  $\text{Im } e$ . On a alors  $\text{Det } e = (\text{Det}' e)(\text{Vol } T^k)$ . Comme les images dans  $\text{Ker } \Delta^2(N)$  des éléments de la base canonique de  $\mathcal{G}^*$  sont des

formes entières, le déterminant  $\text{Det}' e$ , qui est aussi le volume de  $e([0, 1]^k)$ , est un multiple du volume d'un domaine fondamental du réseau des formes entières dans  $\text{Im } e$ . Comme par ailleurs  $\text{Det}' e$  est non nul, il sera donc minoré par le volume de ce domaine fondamental. Si on note  $\rho$  le minimum des normes des 2-formes harmoniques entières non nulles, ce volume est minoré par le volume d'une boule de rayon  $\frac{\rho}{2}$  dans  $\text{Im } e$ , et donc minoré par une constante ne dépendant que de  $n$  et de la métrique  $h$  de  $N$ . On peut donc bien écrire

$$\lambda_1 \geq c(n, a, (N, h)) \cdot \text{Vol}(T^k)^2. \quad \blacksquare$$

Nous allons maintenant supposer que  $e$  n'est pas injective. Notons  $l$  la dimension de son noyau. Le premier nombre de Betti de  $M$  est alors  $b_1(N) + l$ . En effet, on a vu que si une 1-forme  $\varphi = \pi^*(\alpha) + \sum_{i=1}^k \pi^*(a_i) \cdot \omega_i$  est harmonique, cela signifie, d'après (6.4) et (6.5) :

$$\Delta\alpha = 0, da_i = 0 \text{ pour tout } i, \text{ et } \sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0. \quad (6.18)$$

Comme les fonctions  $a_i$  sont constantes. L'ensemble des  $a_i$  tels que  $\sum_{i=1}^k a_i \cdot e_i = 0$  est exactement le noyau de  $e$ . L'espace des formes harmoniques de  $M$  est donc l'espace engendré par les relevés des formes harmoniques de  $N$  et les formes verticales induites par les éléments de noyau de  $e$ .

On peut reprendre la démonstration précédente en prenant pour  $(\omega_i)_i$  une base de  $\mathcal{G}^*$  telle que  $\omega_{k-l+1}, \dots, \omega_k$  soit une base de  $\text{Ker } e$  (le fait que la forme  $\varphi$  est orthogonale aux formes harmoniques se traduit par le fait que  $a_{k-l+1}, \dots, a_k = 0$ ) et en étudiant  $e^*e$  restreint à l'orthogonal de  $\text{Ker } e$ . On obtient de la même façon le résultat du fait 6.2, à savoir que la première valeur propre du laplacien sur  $M$  est minorée à une constante multiplicative près par la première valeur propre de  $(e^*e)|_{(\text{Ker } e)^\perp}$ .

Pour minorer le spectre de  $(e^*e)|_{(\text{Ker } e)^\perp}$ , on doit être un peu plus attentif dans la manipulation des bases de  $\mathcal{G}^*$ .

Soit  $\mathcal{B} = (\omega_1, \dots, \omega_k)$  une base orthonormée de  $\mathcal{G}^*$  et  $\mathcal{B}' = (\omega'_1, \dots, \omega'_k)$  une base du réseau des entiers de  $\mathcal{G}^*$ , telles que  $(\omega_1, \dots, \omega_l)$  et  $(\omega'_1, \dots, \omega'_l)$  soient des bases de  $\text{Ker } e$  (comme l'image du réseau des entiers de  $\mathcal{G}^*$  est contenue dans un réseau, le noyau de  $e$  est effectivement engendré par des éléments entiers). La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est de la forme

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

où  $P_1$  est un bloc carré de taille  $l$ . Si se donne une base orthonormée de  $\text{Im } e$ , la matrice de  $e$  s'écrit sous la forme  $(0, A)$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $(0, A')$  dans la base  $\mathcal{B}'$ , où  $A$  et  $A'$  sont des blocs carrés de taille  $k-l$  et vérifient  $A' = AP_3$ .

Le spectre de  $(e^*e)_{|(\text{Ker } e)^\perp}$  est celui de  $A^*A$ . On peut écrire, comme dans la démonstration du fait 6.14 :

$$\lambda_1 \geq \frac{\text{Det } A^*A}{\|A^*A\|^{k-l-1}} \geq \frac{(\text{Det } A)^2}{\|A\|^{2(k-l-1)}}, \quad (6.19)$$

où  $\lambda_1$  est la première valeur propre non nulle de  $e^*e$ . De plus, on a  $\text{Det } A' = \text{Det } A \cdot \text{Det } P_2$  et donc

$$\text{Det } A = \frac{\text{Det } A'}{\text{Det } P_3} = \text{Det } A' \frac{\text{Det } P_1}{\text{Det } P}. \quad (6.20)$$

Le déterminant de  $A'$  est, comme précédemment, minoré par le covolume du réseau des formes entières dans  $\text{Im } e$ , et  $\text{Det } P$  s'interprète géométriquement comme l'inverse du volume de  $T^k$ .

Il reste à minorer  $\text{Det } P_1$ . Comme  $\text{Ker } e$  est engendré par des éléments entiers de  $\mathcal{G}^*$ , l'orthogonal de  $\text{Ker } e$  pour la dualité définit un sous-tore  $T^{k-l}$  de  $T^k$ . De plus, le dual de de l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}(T^k/T^{k-l})$  du quotient  $T^k/T^{k-l}$  est isomorphe à  $\text{Ker } e$ . La matrice  $P_1$  est donc la matrice de passage d'une base orthonormée de  $\mathcal{G}^*(T^k/T^{k-l})$  dans une base du réseau des entiers de  $\mathcal{G}^*(T^k/T^{k-l})$ , et par conséquent  $\text{Det } P_1$  est l'inverse du volume de  $T^k/T^{k-l}$  pour la métrique quotient. Le diamètre de  $T^k/T^{k-l}$  est majoré par  $\varepsilon$ , comme celui de  $T^k$ , et par conséquent son volume aussi. ■

## 6.2 Petites valeurs propres et norme des 2-formes harmoniques entières

Nous allons ici discuter de la valeur de la constante  $c(n, a, d, (N, h))$  du théorème 6.1, et en particulier de la manière dont elle dépend de la métrique  $h$  sur  $N$ .

Dans la démonstration du théorème, la géométrie de  $N$  intervient quatre fois : on a besoin de contrôler sa courbure pour appliquer la formule de O'Neill et majorer les  $\|e_i\|$  ; en 6.2 apparaissent les valeurs propre  $\lambda_{1,1}(N, h)$  et  $\lambda_{0,1}(N, h)$  ; enfin on fait intervenir en 6.14 le minimum des normes des 2-formes harmoniques non nulles dont la classe de cohomologie est entière.

On peut noter que dans la démonstration du fait 6.2, on a seulement besoin d'une minoration des deux valeurs propres  $\lambda_{1,1}(N, h)$  et  $\lambda_{0,1}(N, h)$ . L'idée est en fait de s'assurer que le spectre de  $(N, h)$  n'interfère pas dans la recherche des petites valeurs propres de  $M$ . On sait par ailleurs que  $\lambda_{0,1}(N, h)$  peut être minoré en fonction du diamètre et de la courbure de  $N$ , et  $\lambda_{1,1}(N, h)$  en fonction du diamètre, de la courbure et du rayon d'injectivité de  $N$ . En outre, une borne sur la courbure est aussi suffisante pour appliquer la formule de O'Neill.

La démonstration du fait 6.14 introduit quand à elle la constante

$$\rho(N, h) = \inf_{\substack{\alpha \in \mathcal{H}^2(N, h) \\ [\alpha] \in H^2(N, \mathbb{Z})}} \|\alpha\|_2 \quad (6.21)$$

dans la minoration de la première valeur propre du laplacien. Il est naturel de se demander si l'on peut contrôler  $\rho(N, h)$  à l'aide des mêmes invariants géométriques que  $\lambda_{0,1}(N, h)$  et  $\lambda_{1,1}(N, h)$  :

**Question 6.22** *Existe-t-il une constante  $c(n, a, d, r) > 0$  telle que si  $(N^n, h)$  est une variété riemannienne vérifiant  $\text{diam}(N, h) \leq d$  et  $|K(N, h)| \leq a$  et  $\text{injrads}(N, h) \geq r$ , alors  $\rho(N, h) \geq c$  ?*

Un argument de compacité permet de montrer qu'avec l'hypothèse de rayon d'injectivité minorée, on peut répondre affirmativement à la question 6.22.

**Proposition 6.23** *Pour tout réels  $a, d, r > 0$  et tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une constante  $c(n, a, d, r) > 0$  (non explicite) telle que si  $(N^n, h)$  est une variété riemannienne vérifiant  $\text{diam}(N, h) \leq d$  et  $|K(N, h)| \leq a$  et  $\text{injrads}(N, h) \geq r$ , alors  $\rho(N, h) \geq c$ .*

**Démonstration :** On considère le tore  $T = T^{b_2(N)}$ , vu comme quotient de  $\mathcal{H}^2(N, h)$  par le réseau des formes harmoniques entières. La métrique  $h$  sur  $N$  induit une norme euclidienne sur  $\mathcal{H}^2(N, h)$  qui passe au quotient sur  $T$  en une métrique plate  $\bar{h}$ . Minorer  $\rho(N, h)$  revient à minorer le rayon d'injectivité de  $(T, \bar{h})$ .

On sait ([AC92]) que l'espace des métriques  $h$  sur  $N$  telles que  $\text{diam}(N, h) \leq d$  et  $|K(N, h)| \leq a$  et  $\text{injrads}(N, h) \geq r$  est relativement compact pour la topologie  $C^\alpha$ . De plus, la métrique  $\bar{h}$  dépend continument de  $h$ . En effet, si on se donne un réel  $\varepsilon > 0$  et une métrique  $h$  sur  $N$ , on aura, pour toute métrique  $h'$  suffisamment proche de  $h$  et toute 2-forme  $\alpha$  harmonique pour la métrique  $h$ ,  $|\|\alpha\|_2 - \|\alpha\|'_2| \leq \varepsilon \|\alpha\|_\infty$ , où  $\|\cdot\|_p$  et  $\|\cdot\|'_p$  désignent les normes pour les métriques  $h$  et  $h'$  respectivement. Comme à courbure et diamètre bornés et rayon d'injectivité minoré, la norme  $L^\infty$  des formes harmoniques est contrôlée par leur norme  $L^2$  (cf. [Li80] théorème 7 et inégalité (3.45)), on peut écrire  $|\|\alpha\|_2 - \|\alpha\|'_2| \leq \tau(n, a, d)\varepsilon \|\alpha\|_2$ . Si  $\alpha'$  est le représentant harmonique pour  $h'$  de la classe de cohomologie de  $\alpha$ , on peut donc finalement trouver un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $h$  tel que pour toute métrique  $h'$  dans  $\mathcal{V}$ ,

$$\|\alpha'\|'_2 \leq \|\alpha\|'_2 \leq (1 + \varepsilon)\|\alpha\|_2. \quad (6.24)$$

Quitte à restreindre le voisinage  $\mathcal{V}$ , on a réciproquement

$$\|\alpha\|_2 \leq (1 + \varepsilon)\|\alpha'\|'_2, \quad (6.25)$$

ce qui implique bien la continuité de  $h \rightarrow \bar{h}$ . L'ensemble décrit par  $\bar{h}$  quand  $h$  varie est donc relativement compact dans l'espace des métriques plates du tore. Il existe par conséquent une métrique sur  $T$  qui réalise la borne inférieure du rayon d'injectivité de  $T$  quand  $h$  varie. En particulier, cette borne inférieure est non nulle ■

On peut se demander si le résultat reste vrai avec des hypothèses plus faibles :

**Question 6.26** *Existe-t-il une constante  $c(n, a, d) > 0$  telle que si  $(N^n, h)$  est une variété riemannienne vérifiant  $\text{diam}(N, h) \leq d$  et  $|K(N, h)| \leq a$  et alors  $\rho(N, h) \geq c$  ?*

Il faut noter par ailleurs qu'une minoration non explicite ne permet pas d'améliorer les minoration déjà connues de la première valeur propre du spectre. On a besoin d'estimations précises :

**Question 6.27** *Si  $\text{diam}(N, h) \leq d$ ,  $|K(N, h)| \leq a$  et  $\text{injrads}(N, h) \geq r$ , peut-on minorer  $\rho(N, h)$  par une constante explicite  $c(n, a, d, r) > 0$  ? Plus précisément, peut-on trouver une constante  $c$  de la forme  $c'(n, a, d) \cdot \text{Vol}(N, h)^{\alpha(n)}$  ou  $c'(n, a, d) \cdot \text{injrads}(N, h)^{\alpha(n)}$  ?*

On peut remarquer qu'explicitement le rôle du volume de  $N$  dans cette minoration permet d'obtenir dans le théorème 6.1 une minoration de  $\lambda_{1,1}(M, g)$  en fonction du volume de  $(M, g)$ .

## Références

- [AC92] M. ANDERSON et J. CHEEGER, «  $C^\alpha$ -compactness for manifolds with Ricci curvature and injectivity radius bounded below », *Journal of Differential Geometry*, 35, p. 265–281, 1992.
- [ALK00] J. A. ÁLVAREZ LÓPEZ et Y. A. KORDYUKOV, « Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations », *Geom. Func. Anal.*, 10 (5), p. 977–1027, 2000, math.DG/9902147.
- [Be87] A. L. BESSE, *Einstein Manifolds*. Springer Verlag, 1987.
- [BT82] R. BOTT et L. W. TU, *Differential form in algebraic topology*. Springer Verlag, 1982.
- [Ca84] Y. CARRIÈRE, « Les propriétés topologiques des flots riemanniens retrouvées à l'aide du théorème des variétés presque plates », *Mathematische Zeitschrift*, 186, p. 393–400, 1984.
- [CC90] B. COLBOIS et G. COURTOIS, « A note on the first non zero eigenvalue of the Laplacian acting on  $p$ -forms », *Manuscripta Mathematica*, 68 (2), p. 143–160, 1990.
- [CC00] B. COLBOIS et G. COURTOIS, « Petites valeurs propres des  $p$ -formes différentielles et classe d'Euler des  $S^1$ -fibrés », *Annales scientifiques de l'ÉNS*, 33, p. 611–645, 2000.
- [CFG92] J. CHEEGER, K. FUKAYA et M. GROMOV, « Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds », *J. Am. Math. Soc.*, 5, p. 327–372, 1992.
- [CG86] J. CHEEGER et M. GROMOV, « Collapsing riemannian manifolds while keeping their curvature bounded I », *Journal of Differential Geometry*, 23, p. 309–346, 1986.



- [CT97] S. CHANILLO et F. TRÈVES, « On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian », *Journal of Differential Geometry*, 45 (2), p. 273–287, 1997.
- [Do82] J. DODZIUK, « Eigenvalues of the Laplacian on forms », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 85, p. 438–443, 1982.
- [Fo95] R. FORMAN, « Spectral Sequences and Adiabatic Limits », *Comm. math. phys.*, 168, p. 57–116, 1995.
- [GHL87] S. GALLOT, D. HULIN et J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*. Springer Verlag, 1987.
- [Gr80] M. GROMOV, « Paul Levy’s isoperimetric inequality », *Prépublication IHÉS*, 1980.
- [He60] R. HERMANN, « A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifold be a fibre bundle », *Proc. of Am. Math. Soc.*, 11, p. 236–242, 1960.
- [Ja03] P. JAMMES, « Sur le spectre des fibrés en tore qui s’effondrent », *Manuscripta mathematica*, 110 (1), p. 13–31, 2003.
- [Li80] P. LI, « On the Sobolev constant and the  $p$ -spectrum of a compact riemannian manifold », *Annales scientifiques de l’ÉNS*, 13, p. 451–469, 1980.
- [Lo02] J. LOTT, « Collapsing and the differential form Laplacian : the case of a smooth limit space », *Duke Math. Journal*, 114, p. 267–306, 2002, math.DG/9902111.
- [LY80] P. LI et S.T. YAU, « Estimates of eigenvalues of a compact riemannian manifold », *Proceedings Symposium on Pure Math.*, 36, p. 205–239, 1980.
- [Sc80] W. SCHMIDT, *Diophantine approximation*. Numéro 785 dans Lecture notes in mathematics. Springer Verlag, 1980.

Pierre JAMMES  
 Université de Neuchâtel  
 Institut de mathématiques  
 Rue Émile Argand 11  
 CH-2007 Neuchâtel  
 Pierre.Jammes@unine.ch