

DES ESPACES DE POLYGONES AUX ESPACES DE POLYÈDRES EN SUIVANT BAVARD, GHYS ET THURSTON

François Fillastre*

Résumé

Dans l'article *Polygones du plan et polyèdres hyperboliques* [BG92], C. Bavard et É. Ghys donnent une construction simple d'exemples de polyèdres de Coxeter en montrant comment paramétrer des ensembles de polygones du plan réel par des polyèdres hyperboliques.

L'article de W. P. Thurston, [Thu98], examine les ensembles de métriques euclidiennes à singularités coniques sur la sphère et construit des orbifolds hyperboliques complexes.

On va considérer des ensembles construits canoniquement à partir des polyèdres de Bavard et Ghys, et, grâce à un théorème d'Aleksandrov, montrer qu'ils sont des formes réelles des orbifolds de Thurston.

Abstract

In their article on polygons and hyperbolic polyhedra [BG92], C. Bavard and É. Ghys built in a simple way examples of Coxeter polyhedra. This construction relies on a parametrization of polygons in the plane by hyperbolic polyhedra.

In his article on shapes of polyhedra and triangulations of the sphere [Thu98], W. P. Thurston studies the sets of euclidean metrics with cone singularities on the sphere, and he constructs complex hyperbolic orbifolds.

We will consider sets built in a canonical way from Bavard and Ghys' polyhedra. We will show that, thanks to a theorem of Aleksandrov, they are real forms of Thurston's orbifolds.

On rappellera dans un premier temps la très jolie construction de Bavard et Ghys, qui permet de paramétrer les ensembles de déformations de polygones convexes par des polyèdres hyperboliques (première section) et de fabriquer des polyèdres de Coxeter. Cette construction est inspirée de celle de Thurston, concernant, pour résumer, les polyèdres convexes de \mathbb{R}^3 . L'article de Thurston est lui-même une description différente d'une construction de Deligne et Mostow [DM86], mais cet aspect ne sera pas abordé ici. L'article de Bavard et Ghys est certes antérieur à celui de Thurston pour la date de publication, mais la prépublication de celui-ci est plus ancienne.

La seconde section décrit cette construction de Thurston, en suivant la démarche de son article. La troisième section explique le lien entre ces deux constructions : en partant de considérations simples sur les polyèdres, on montre que les espaces de Bavard et Ghys sont des formes réelles des espaces de Thurston, c'est-à-dire l'ensemble des points fixes d'une involution isométrique anti-holomorphe.

La quatrième section, qui fait office d'annexe, décrit les métriques dont sont munis naturellement ces espaces, et qui en font des cônes-variétés, ou, dans certains cas, des orbifolds. Le cas où tous les angles sont les mêmes est traité dans la note "complémentaire" [FI], en collaboration avec Alessandra Iozzi.

Table des matières

1 Construction de Bavard et Ghys

2

*Institut de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Neuchâtel, Rue Emile Argand 11, CH-2007 Neuchâtel, Suisse et Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4, France. fillastre@picard.ups-tlse.fr

2	Construction de Thurston	5
2.1	Métriques euclidiennes à singularités coniques sur la sphère	5
2.2	Cocycles	6
2.3	Structure hyperbolique complexe sur l'ensemble de métriques	9
3	Liens entre les deux constructions	14
3.1	Espace des métriques réelles	14
3.2	Une forme réelle de $\overline{\mathbb{T}}$	16
4	Structures métriques de $\mathbb{B}\mathbb{G}$ et \mathbb{T}	17
4.1	Orbifolds et cône-variétés	17
4.2	Les orbifolds $\mathbb{B}\mathbb{G}$ et \mathbb{T}	20
5	Remerciements	23

1 Construction de Bavard et Ghys

On va rappeler la construction et les résultats de [BG92]. Il s'agit de construire un polyèdre hyperbolique associé à un ensemble de polygones. Cette construction est aussi rappelée dans [IP99], et d'une façon extrêmement détaillée dans [KNY99a], [KNY99b] et [YNK02]. [KY93] contient une construction pour les étoiles à cinq branches, issues de pentagones.

Définition 1.1 *On identifie les **polygones** à n sommets du plan réel à des n -uplets $P = (u_1, \dots, u_n)$ avec $u_i \in \mathbb{R}^2$ où u_i désigne le $i^{\text{ème}}$ sommet, numérotés dans l'ordre direct. On les considère centrés à l'origine, c'est à dire tels que $\sum u_i = 0$. On adopte une notation cyclique en posant $u_{n+1} = u_1$.*

On note \mathcal{P}_n l'ensemble des polygones à n sommets. C'est un espace vectoriel réel de dimension $2n - 2$.

*Quand on oriente les arêtes du polygone dans le sens trigonométrique, **l'angle extérieur** (orienté positif) entre deux arêtes a_1 et a_2 est l'angle qu'elles forment vues comme vecteurs de \mathbb{R}^2 . On considère la valeur positive de cet angle. On le note $ext(a_1, a_2)$.*

L'angle intérieur (positif) entre a_1 et a_2 , noté $int(a_1, a_2)$, est donné par

$$int(a_1, a_2) = \pi - ext(a_1, a_2). \tag{1}$$

*Un **polygone convexe** est un polygone dont les angles extérieurs sont compris entre 0 et π et dont la*

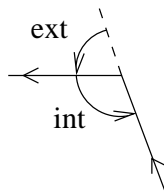


FIG. 1 –

somme est égale à 2π .

\mathcal{P}_n est naturellement muni de la forme quadratique d'aire

$$A_P(P) = \frac{-1}{2} \sum_{i=1}^n \det(u_i, u_{i+1}). \tag{2}$$

En effet, le déterminant est la forme d'aire de \mathbb{R}^2 , et pour deux points a et b , $\det(a, b)$ est l'aire du parallélogramme de sommets l'origine, a , b et $a + b$ et donc $\frac{1}{2} \det(a, b)$ est l'aire du triangle formé par les sommets l'origine, a et b . L'aire de P est la somme des aires des triangles formés par deux sommets

consécutifs de P et l'origine. On rajoute un signe - pour avoir plus loin une signature de la forme d'aire plus "classique".

Si $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ est un n -uplet de droites vectorielles de \mathbb{R}^2 tel que pour tout i de 1 à n , les droites Δ_i et Δ_{i+1} soient distinctes, alors on considère le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_D de dimension $n - 2$ de \mathcal{P}_n formé des polygones d'arêtes parallèles à $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, c'est-à-dire tels que $u_{i+1} - u_i \in \Delta_i$ pour tous les i de 1 à n .

Définition 1.2 *Un polygone dégénéré est un polygone de \mathcal{P}_D dont une arête (e.g. la i^e) est réduite à un point, i.e. $u_i = u_{i+1}$. Une dégénérescence d'une arête parallèle à la droite Δ_i est une suite de polygones dans \mathcal{P}_D dont la longueur de la i^e arête tend vers 0.*

Dans toute la suite, la notation θ_k désigne les angles intérieurs des polygones.

Ces dégénérescences ne peuvent avoir lieu que si l'angle extérieur entre les arêtes Δ_{i-1} et Δ_{i+1} est inférieur à π , c'est-à-dire, comme cet angle est égal à $2\pi - (\theta_i + \theta_{i+1})$, seulement si $\theta_i + \theta_{i+1} > \pi$. Le nouvel angle intérieur obtenu est $\theta_i + \theta_{i+1} - \pi$.

En notant $\angle(\Delta, \Delta')$ l'angle orienté de deux droites orientées distinctes (ce qui correspond à l'angle extérieur pour les arêtes), Bavard et Ghys montrent que la signature de la restriction de A à \mathcal{P}_D est (k_+, k_-) avec

$$k_+ = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \angle(\Delta_i, \Delta_{i+1}) \right) - 1; \quad (3)$$

$$k_- = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n \angle(\Delta_{i+1}, \Delta_i) \right) - 1. \quad (4)$$

Maintenant considérons pour $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ la suite des directions des arêtes d'un polygone convexe Q fixé, qu'on appelle le **polygone initial**.

$$A_P \text{ est de signature } (1, n - 3) \text{ sur } \mathcal{P}_D. \quad (5)$$

On note $\vec{D} = (\vec{\Delta}_1, \dots, \vec{\Delta}_n)$ où $\vec{\Delta}_i$ est la demi-droite donnée par la i^e arête du polygone convexe de départ et on définit le cône $P_{\vec{D}} = \{Q \in P_D : u_{i+1} - u_i \in \vec{\Delta}_i \forall i\}$. Les polygones du cône sont tous ceux qui sont formés à partir des mêmes demi-droites que Q , en prenant en compte les dégénérescences.

Tous les polygones du cône ont alors les mêmes angles orientés que Q : ils sont tous convexes et donc d'aire négative :

$$A_P \text{ est strictement négative sur l'intérieur de } P_{\vec{D}}. \quad (6)$$

A partir de maintenant, on ne considère que les polygones d'aire égale à -1, ce qui revient à regarder les polygones modulo les homothéties. On note toujours $P_{\vec{D}}$ l'intersection de $P_{\vec{D}}$ avec l'ensemble des polygones d'aire égale à -1.

La nappe supérieure de l'ensemble des vecteurs égaux à -1 pour une forme quadratique de signature $(1, d - 1)$ sur un espace vectoriel de dimension d est un modèle de l'espace hyperbolique de dimension $d - 1$, le modèle de l'hyperboloïde, que l'on note \mathbb{H}^{d-1} . Chaque polygone de $P_{\vec{D}}$ est identifié à un point de l'espace hyperbolique réel de dimension $n - 3$.

Proposition 1.3 *$P_{\vec{D}}$ est un polyèdre hyperbolique convexe de volume fini. De plus il est compact si et seulement si le polygone initial n'a pas d'arêtes parallèles.*

Preuve : Chaque sous-ensemble de $P_{\vec{D}}$ de codimension 1 est formé des polygones ayant la même dégénérescence, ils correspondent à des hyperplans vectoriels de \mathbb{R}^{n-2} . Leurs intersections avec \mathbb{H}^{n-3} sont des hypersurfaces totalement géodésiques. Il est facile de voir que pour chacune de ces hypersurfaces, $P_{\vec{D}}$ est contenu d'un seul côté de l'hypersurface. $P_{\vec{D}}$ est alors l'intersection de demi-espaces : c'est un polyèdre hyperbolique convexe.

Comme le bord de \mathbb{H}^{n-3} est le cône isotrope de A_P , un sommet à l'infini du polyèdre correspond au cas où un polygone de $P_{\vec{D}}$ peut dégénérer vers un polygone (convexe) d'aire nulle, c'est-à-dire en une droite, ce qui n'est possible que si le polygone initial admet deux arêtes parallèles. Le nombre d'arêtes

étant fini, il n'a qu'un nombre fini de points à l'infini dans $P_{\overline{D}}$, il est donc de volume fini. S'il n'a aucun point à l'infini, il est compact. Il s'agit bien d'un point à l'infini, et non d'un sous-ensemble plus grand du bord, car les dégénérescences se font le long de géodésiques qui correspondent à des 2-plans vectoriels. Ces 2-plans s'intersectent en une droite qui correspond aux polygones d'aire nulle, et son intersection avec l'hyperboloïde est de dimension 0. □

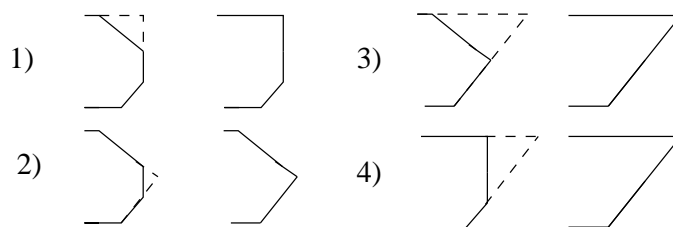
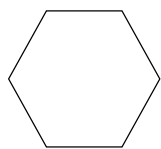


FIG. 2 – **1)** On peut faire dégénérer une arête du polygone initial pour obtenir un polygone qui correspondra à un point d'une face de codimension 1 du polyèdre. **2)** Une autre dégénérescence définit une autre face de codimension 1. **3)** Si on dégénère le polygone issu de la dégénérescence de 1), on obtient un polygone qui correspondra à un point sur une face de codimension 2 du polyèdre. **4)** On obtient le même polygone par des dégénérescences différentes : la face de codimension 2 définie en 3) est l'intersection des faces de codimension 1 définies en 1) et 2).

La suite de l'article étudie la combinatoire de ce polyèdre hyperbolique, qui est parfaitement déterminée par la seule connaissance du polygone initial et Bavard et Ghys déterminent les cas où ce polyèdre est un **polyèdre de Coxeter**, c'est-à-dire le cas où les angles dièdres sont de la forme π/k , avec k entier positif :

Théorème 1.4 (Bavard et Ghys) *Le polyèdre est de Coxeter si et seulement si les birapports de quatre droites consécutives (dans l'ordre cyclique) de $D = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ sont soit positifs ou nuls, soit dans la liste $\{-tg^2\pi/k ; k \geq 3\}$.*

Si le birapport est positif, c'est que les deux faces consécutives du polyèdre, données par les quatre droites, ne se rencontrent pas, s'il est nul, c'est qu'elles se rencontrent à l'infini.



Par exemple, prenons le cas où l'ensemble des droites est composé de six droites formant entre elles un angle de $\pi/3$. Tous les birapports ont pour valeur l'infini, (2 des 4 droites sont les mêmes) et on voit bien sur un dessin que toutes les faces de codimension un sont définies, mais qu'il n'y a aucune intersection.

Lorsqu'il est négatif, Bavard et Ghys démontrent, à partir d'une définition de l'intersection de deux faces consécutives du polyèdre en fonction du rapport des aires des triangles du polygone correspondants aux dégénérescences de deux arêtes, que ce rapport d'aire est en fait l'opposé du birapport des quatre droites consécutives du polygone (celles à partir desquelles on définit les deux faces du polyèdre).

En fait l'angle dièdre θ du polyèdre est donné par

$$tg^2(\theta) = -[\Delta_{i-1}, \Delta_i, \Delta_{i+1}, \Delta_{i+2}], \quad (7)$$

donc le polyèdre est de Coxeter quand les valeurs des birapports se trouvent dans la liste indiquée.

On sait qu'on peut avoir une expression du birapport en fonction des tangentes des angles que les quatre droites forment entre elles. Ce qu'on ne sait pas, c'est si le birapport peut s'exprimer comme la tangente d'un angle qui s'écrit comme une fonction simple (affine, quotient...) des angles que les droites forment entre elles. En particulier, on ne sait pas s'il est possible d'avoir une définition de l'angle dièdre du polyèdre par une fonction simple des angles du polygone.

2 Construction de Thurston

2.1 Métriques euclidiennes à singularités coniques sur la sphère

On rappelle ici les constructions de [Thu98]. Il y aurait d'autres façons de décrire cette construction, mais nous nous contenterons de développer la description donnée par Thurston.

Définition 2.1 Soit \mathbb{S}^2 la sphère de \mathbb{R}^3 , x_1, \dots, x_n des points de \mathbb{S}^2 et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des nombres réels compris strictement entre 0 et 2π . Une **métrique euclidienne à singularités coniques** est telle que $\mathbb{S}^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$ possède une structure euclidienne pour laquelle chaque x_i admet un voisinage isométrique à un cône dont l'angle autour du sommet est α_i .

Un tel cône est obtenu en prenant un secteur du plan euclidien dont les deux segments font un angle $2\pi - \alpha_i$ et en les identifiant. L'angle $2\pi - \alpha_i$ est la **courbure** de la singularité. On note k_i la courbure correspondant au cône-angle α_i .

L'angle α_i est le **cône-angle** du point x_i .

$C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est l'ensemble des métriques euclidiennes à singularités coniques dont les cône-angles sont $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, sur la sphère \mathbb{S}^2 modulo les homothéties.

La formule de Gauss-Bonnet donne

$$\sum_{i=1}^n k_i = 4\pi, \quad (8)$$

ce qui indique que le nombre de points singuliers est au moins égal à 3. En terme de cône-angles, la formule de Gauss-Bonnet s'écrit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2(n-2)\pi. \quad (9)$$

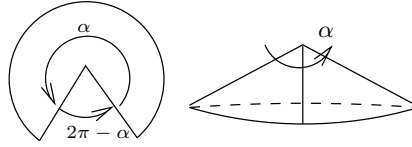


FIG. 3 –

Attention, ce que Thurston note α_i dans son article sont (parfois) les courbures des singularités. On peut définir ces métriques d'une façon plus formelle en disant que, pour un choix des x_i et des α_i , elles sont localement isométriques à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ muni de la métrique

$$ds^2 = \prod |z - x_i|^{2\beta_i} |dz|^2, \quad (10)$$

où $\beta_i = \frac{\alpha_i}{2\pi} - 1$.

Remarque 2.2 On peut aussi 'voir' chacune de ces structures comme un polyèdre de \mathbb{R}^3 , ce qui sera expliqué plus tard par le théorème d'Aleksandrov, page 16.

L'ensemble $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est homéomorphe au quotient de l'ensemble des configurations de points distincts sur la sphère (qui est lui-même homéomorphe à $(\mathbb{CP}^1 - \{x_1, \dots, x_n\})^n / \text{PSL}(2, \mathbb{C})$) par un sous-groupe du groupe des permutations ([Tro86], [Tro91], [Thu98] proposition 8.1, [Koj01]). Les permutations correspondent au cas où deux points singuliers ont même cône-angle : ils sont donc interchangeables.

Par définition, le groupe fondamental de l'espace des configurations de points distincts sur la sphère est le groupe de tresse pur de la sphère, et le quotient du groupe fondamental de cet espace par le groupe des permutations est le groupe de tresse (plein) de la sphère ([Bir74]) :

Proposition 2.3 Le groupe fondamental de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un quotient du groupe de tresse pur de la sphère par un sous-groupe du groupe des permutations. Si les α_i sont tous différents, il s'agit du groupe de tresse pur, et si ils sont tous égaux, il s'agit du groupe de tresse (plein).

2.2 Cocycles

On veut “paramétrer” localement $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par des nombres complexes. On utilise le résultat suivant, dont la première partie est faite dans [Thu98]. Le tout est fait dans le cas plus général d’une surface compacte localement euclidienne à singularités coniques dans [ILT C01].

Définition 2.4 On considère 4 points de \mathbb{R}^2 tels qu’aucun ne soit contenu dans l’enveloppe convexe des trois autres. Leur enveloppe convexe forme un polygone dont il suffit de prendre une diagonale pour obtenir une triangulation. Il y a donc deux choix de triangulation, et l’opération permettant de passer de l’une à l’autre en considérant l’autre diagonale s’appelle un **flip**.

Proposition 2.5 (Triangulation) Chaque élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ admet une triangulation, dans le sens d’une subdivision par les images de triangles géodésiques euclidiens, avec identification possible des sommets et/ou des arêtes, et où l’ensemble des sommets est précisément l’ensemble des points singuliers.

De plus, pour deux triangulations de ce type, on peut passer de l’une à l’autre par une succession de flips (en nombre finis).

Dans toute la suite, nous ne considérerons que les triangulation du type décrit dans la proposition et on fixe une triangulation sur un élément donné de $m \in C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

On envoie isométriquement un segment de la triangulation, arbitrairement choisi, dans \mathbb{C} , avec un sommet à l’origine. On voudrait étendre cette opération à toutes les arêtes de la triangulation, c’est-à-dire que l’image d’une autre arête par cette opération est un vecteur de module la longueur de l’arête et dont l’angle orienté (pour le sens direct) avec l’image d’une arête adjacente est le même que celui que forment les deux arêtes dans la triangulation. Ainsi à chaque arête orientée de la triangulation est associé un nombre complexe, qui est la différence des extrémités de son image.

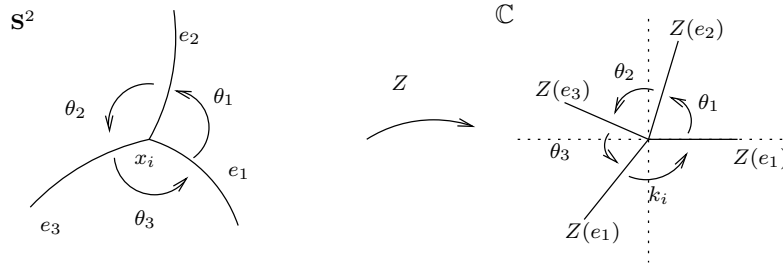


FIG. 4 – Cette application n’est pas bien définie.

La nature des singularités fait que cette application est multi-valuée (figure 4). Pour passer outre cette difficulté, on se place dans le revêtement universel de la sphère moins ses points singuliers. On relève aussi les segments de la triangulation. On peut voir l’ensemble des relevés des arêtes comme une “triangulation” du revêtement universel, à ceci près que les sommets de cette “triangulation” n’appartiennent pas à l’espace.

L’application qui envoie isométriquement chaque arête de la triangulation du revêtement universel dans \mathbb{C} est alors bien définie modulo les isométries de \mathbb{C} . On note Z cette application (figure 5). On note m_0 la sphère munie de la métrique m moins ses points singuliers.

Définition 2.6 Un **cocycle** Z est une application qui associe un nombre complexe à chaque arête orientée du revêtement universel de m_0 , de la manière décrite au-dessus.

Il est clair que la somme des images des arêtes d’un triangle orienté est nulle, on appelle cette propriété la **propriété des cocycles**. Le terme cocycle vient du fait que les applications Z sont effectivement des 1-cocycles pour la cohomologie simpliciale, voir à la fin de cette partie.

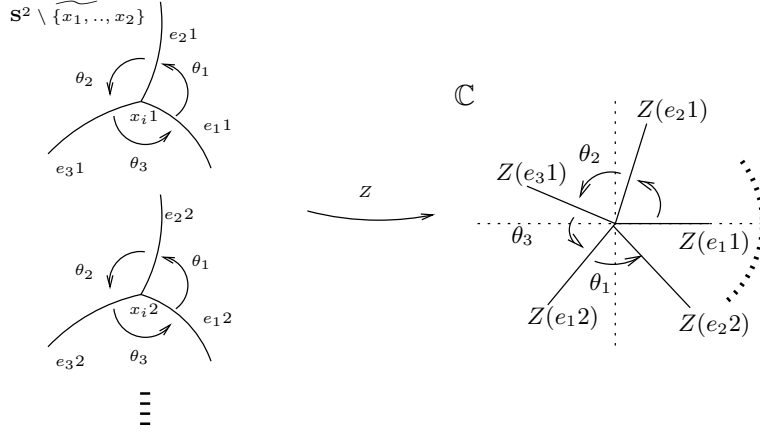


FIG. 5 – Cette application est bien définie.

On observe que si γ est un lacet de la sphère moins ses points singuliers, et e une arête de la triangulation du revêtement universel, on a l'existence d'un morphisme de groupe h_0 :

$$\exists h_0 : \pi_1(m_0) \rightarrow \mathbb{S}^1 : \forall \gamma \forall e, Z(\gamma e) = h_0(\gamma)Z(e) \quad (11)$$

($\pi_1(m_0)$ est le groupe libre à $n-1$ générateurs). Prenons par exemple un lacet autour d'un point singulier, de point base un point sur une arête e ; si ce lacet fait un tour, $h_0(\gamma)$ désigne la rotation (vue comme isométrie de \mathbb{C}) qu'il faut effectuer dans \mathbb{C} pour passer de $Z(e)$ à $Z(\gamma e)$, c'est-à-dire dans ce cas la rotation est d'angle l'angle du point singulier autour de laquelle tourne le lacet. H_0 est l'holonomie de la métrique, voir à la fin de cette partie.

Lemme 2.7 *Un cocycle définit uniquement la métrique à partir de laquelle il est construit.*

Preuve : Pour deux images par Z de la même arête (ordonnées par le sens trigonométrique) de la triangulation de la sphère, l'argument du quotient de la première image par la seconde donne l'angle de la singularité autour du sommet considéré.

De plus on peut retrouver toutes les distances entre deux sommets de la triangulations, puisque connaître les valeurs du cocycle, c'est connaître les longueurs des arêtes. On connaît aussi l'angle que forment deux arêtes entre elles. On arrive à reconstituer la triangulation de la sphère, on connaît alors l'emplacement des points singuliers ainsi que leur cône-angle : la métrique est entièrement déterminée par ces informations.

On constate même qu'on peut reconstituer la métrique en connaissant seulement les valeurs d'un cocycle pour les arêtes d'un domaine fondamental d'une triangulation. □

Pour une métrique donnée, il y a un cocycle pour chaque triangulation. En fait, si on a seulement trois points singuliers, il n'y a qu'une triangulation possible, et dans les autres cas, pour des triangulations différentes d'une même métrique, les cocycles correspondants à ces triangulations sont équivalents dans un sens que l'on va définir.

Définition 2.8 *Soient deux cocycles, Z et Z' , définis pour les triangulations respectives T et T' d'une même métrique qui diffèrent au plus d'un flip et tels que pour toute arête e hors du 4-gone qui définit le flip, $Z(e)=Z'(e)$. On dit alors que Z et Z' sont en relation.*

On peut définir formellement la relation : le polygone où intervient le flip est formé de quatre arêtes e_1, e_2, e_3, e_4 orientées dans le sens direct, qui relient successivement les quatre points singuliers, et d'une cinquième notée e_5 , qui est la diagonale. On définit la relation

$$Z \overline{\mathcal{R}} Z' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Soit } Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_2) \\ \text{Soit } Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_4) \end{cases} \quad (12)$$

(pour une orientation adéquate de e_5).

On note \mathfrak{R} la relation engendrée par $\overline{\mathfrak{R}}$, c'est-à-dire que s'il existe n cocycles Z_i tels que Z_i est en relation avec Z_{i+1} , avec $Z = Z_1$ et $Z' = Z_n$, alors

$$Z\mathfrak{R}Z' \Leftrightarrow Z\overline{\mathfrak{R}}Z_2\overline{\mathfrak{R}}\dots\overline{\mathfrak{R}}Z_{n-1}\overline{\mathfrak{R}}Z'. \quad (13)$$

Proposition 2.9 *La relation \mathfrak{R} est une relation d'équivalence. De plus, pour chaque métrique et pour le choix d'une orientation, il y a une seule classe d'équivalence : pour chaque métrique et orientation, deux triangulations de la métrique définissent des cocycles en relation.*

Preuve : La première condition dans la définition de la relation concerne le cas où, pour 4 points, la triangulation est la même. Cette condition est en fait trivialement donnée par la propriété des cocycles, et on a donc bien que $Z\mathfrak{R}Z$. \mathfrak{R} est transitive puisqu'elle est engendrée par $\overline{\mathfrak{R}}$.

La propriété des cocycles donne les relations

$$Z(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_2); \quad (14)$$

$$Z(e_5) = Z(e_3) + Z(e_4); \quad (15)$$

$$Z'(e_5) = -Z'(e_1) - Z'(e_4); \quad (16)$$

$$Z'(e_5) = Z'(e_2) + Z'(e_3). \quad (17)$$

De plus on remarque que si $Z\mathfrak{R}Z'$, on a forcément les égalités

$$Z(e_1) = Z'(e_1), Z(e_2) = Z'(e_2), Z(e_3) = Z'(e_3), Z(e_4) = Z'(e_4). \quad (18)$$

On montre alors que si $Z\mathfrak{R}Z'$ alors $Z'\mathfrak{R}Z$:

– Si Z et Z' sont issus de la même triangulation, on est dans le cas

$$Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_2); \quad (19)$$

– Sinon

$$Z\mathfrak{R}Z' \Leftrightarrow Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_4) \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow -Z'(e_1) - Z'(e_4) = -Z(e_1) - Z(e_4) \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow -Z'(e_1) - Z'(e_4) - Z'(e_2) + Z'(e_2) = -Z(e_1) - Z(e_4) + Z(e_2) - Z(e_2) \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow -Z'(e_1) - Z'(e_2) - Z'(e_4) + Z'(e_2) = Z(e_5) - Z(e_4) + Z(e_2) \quad (23)$$

$$\Leftrightarrow Z(e_5) = -Z'(e_1) - Z'(e_2) \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow Z'\mathfrak{R}Z. \quad (25)$$

La proposition 2.5 indique que tous les cocycles sont en relation. □

Définition 2.10 *On appelle les classes d'équivalence Z modulo \mathfrak{R} des **cocycles généralisés**. Comme le cocycle généralisé ne dépend pas de la triangulation, on peut parler du cocycle (généralisé) associé à une métrique.*

Point de vue cohomologique On peut traduire ce résultat en terme de cohomologie d'un complexe simplicial sur lequel agit le groupe fondamental d'un élément m_0 (i.e. une triangulation de m_0) à valeur dans \mathbb{C} . Deux triangulations d'une même métrique sont alors cohomologues, et le cocycle généralisé est la classe de cohomologie du cycle fondamental du premier groupe de cohomologie.

Une autre façon de voir est de considérer une $(\mathbb{C}, \text{Isom}(\mathbb{C}))$ -structure sur la sphère moins ses points singuliers, le cocycle peut être donné par l'application développante, et h_0 désigne alors la partie orthogonale (la rotation) de l'holonomie d'un lacet γ . Les cocycles peuvent alors être décrit en terme de cohomologie des groupes, et ils paramétrisent des déformations infinitésimales de la métrique singulière sur la sphère. Ce point de vue, ainsi que les relations entre l'article de Thurston et celui de Deligne et Mostow [DM86], a été étudié par Marc Troyanov dans un document, qui, malheureusement, n'existe jusqu'à aujourd'hui que sous forme de manuscrit, et n'est donc pas accessible.

Ces deux aspects (cohomologie et holonomie) ne seront pas utilisés ici.

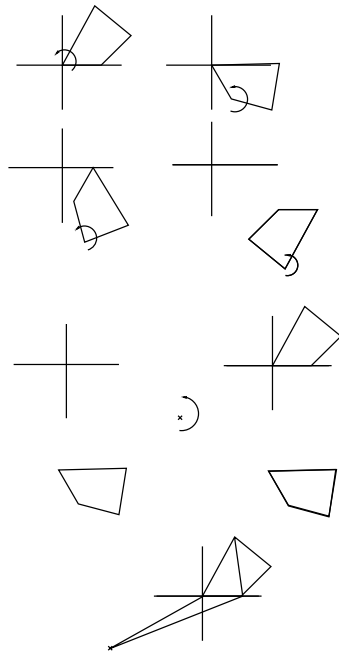
2.3 Structure hyperbolique complexe sur l'ensemble de métriques

On va étudier non pas $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, mais, ce qui revient au même, $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, l'ensemble des cocycles généralisés associés aux métriques de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Proposition 2.11 *On peut munir $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'une structure de variété complexe de dimension $n-2$.*

Preuve : On va définir un atlas sur $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Deux cocycles sont dans la même carte si l'un peut être obtenu à partir de l'autre par une petite déformation de l'image de la triangulation dans \mathbb{C} . Si Z est dans la même carte que Z' , il définit une métrique m , et cette métrique peut être obtenue par un autre cocycle, lui-même obtenu par une petite déformation d'un cocycle définissant une autre métrique. Il s'agit de deux cartes différentes de $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ou autrement dit, une carte est donnée par le choix d'une triangulation.

On montre d'abord que les applications de coordonnées sont à valeur dans \mathbb{C}^{n-2} , ce qui revient à regarder sur combien d'arêtes on doit connaître la valeur du cocycle pour pouvoir retrouver toutes les valeurs du cocycle.



On choisit un sommet S dans la triangulation d'un domaine fondamental et on prend un arbre (connexe) maximal dans le 1-squelette de la triangulation des n sommets moins S .

Supposons que la valeur de l'image par le cocycle soit connue pour chaque arête de l'arbre, alors on connaît les valeurs de toutes les images des arêtes de la triangulation par la propriété des cocycles, sauf celles pour les arêtes ayant S pour sommet. On note X l'image de l'arbre dans \mathbb{C} .

On applique alors successivement à X les rotations de centres les sommets connus de la triangulation et d'angles les cône-angles à ces sommets ; dans le cas où la composée de deux rotations successives est une translation, c'est-à-dire quand la somme des deux angles est $2k\pi$, on considère qu'il s'agit d'une rotation d'angle 0. A la fin de cette opération, on obtient X modulo une rotation, car la somme des cône-angles est un multiple de 2π , et il nous manque la rotation de centre l'image de S . L'image de S est alors forcément le point fixe de cette rotation, et les valeurs manquantes du cocycle sont les différences entre l'image S et les images des sommets concourants.

La figure ci-contre est un exemple avec les angles

$$(10\pi/6, 10\pi/6, 10\pi/6, 4\pi/6, 2\pi/6).$$

On applique les 4 premières rotations aux quatre sommets, et le centre de la rotation d'angle $2\pi/6$ qui permet de passer de la première figure à la dernière est le sommet manquant.

Or un arbre maximal dans un ensemble de n sommets moins un a $n - 2$ arêtes, car dans un arbre, le nombre de sommets moins le nombre d'arêtes est égal à 1.

Il faut vérifier que les changements de cartes sont holomorphes. Pour changer de carte, il suffit de passer d'une triangulation à l'autre, ce qui se fait par une succession de flips, ce qui revient à faire plusieurs fois l'opération $Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_2)$ (ou $Z'(e_5) = -Z(e_1) - Z(e_4)$), avec les notations de la section précédente, qui est une application linéaire de \mathbb{C}^{n-2} dans \mathbb{C}^{n-2} .

□

En d'autres termes, un cocycle (et donc une métrique) est défini par la connaissance de $n - 2$ nombres complexes.

On remarque que $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est même muni d'une structure de variété affine puisque les changements de cartes sont \mathbb{C} -linéaires, et que les valeurs possibles pour les cocycles sont contenues dans un cône de \mathbb{C}^{n-2} , puisque si les valeurs (v_1, \dots, v_{n-2}) définissent un élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $(\lambda v_1, \dots, \lambda v_{n-2})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ aussi, car les métriques sont définies à homothéties près.

La suite est dans le même esprit que le chapitre précédent puisqu'on considère la forme d'aire sur l'espace des cocycles, issue d'une forme hermitienne sur \mathbb{C}^{n-2} :

$$A_C(Z) = \frac{-1}{4} \sum_{\text{triangles}} iZ(e_1)\overline{Z(e_2)} - iZ(e_2)\overline{Z(e_1)}, \quad (26)$$

définie comme suit : les $n - 2$ nombres complexes (v_1, \dots, v_n) qui définissent un cocycle Z permettent de reconstruire l'image d'un relevé d'une triangulation d'une métrique sur la sphère. $A_C(Z)$ est la somme des aires des triangles de cette triangulation dans \mathbb{C} (dans la formule, e_1 et e_2 sont deux arêtes successives pour le sens trigonométrique d'un triangle de la triangulation de la métrique sur la sphère définie par Z). A_C ne dépend pas du choix du relevé, ni même du cocycle, puisque l'aire est invariante par flip. Il s'agit en fait d'une forme bilinéaire sur l'ensemble des métriques (elle est compatible avec les changements de cartes (les changements de triangulation) puisqu'invariante par flip).

Les cocycles sont d'aire négative. En effet, $A_C(Z)$ est toujours négative quand on tourne dans le sens trigonométrique : dans le sens direct, on a $v_1 = \cos \theta + i \sin \theta$, $v_2 = \cos \theta' + i \sin \theta'$ avec $\theta' \geq \theta$, donc : $iv_1\overline{v_2} - iv_2\overline{v_1} = \cos \theta \sin \theta' - \cos \theta' \sin \theta = \sin(\theta' - \theta)$ qui est positif puisque $\theta' - \theta$ est compris entre 0 et π .

Remarque. On note une analogie, qui sera précisée ultérieurement, entre cette forme et celle utilisée par Bavard et Ghys. En effet, en prenant $v_1 = a_1 + ib_1$ et $v_2 = a_2 + ib_2$, on a $iv_1\overline{v_2} - iv_2\overline{v_1} = 2a_1b_2 - 2b_1a_2$ ce qui est quatre fois l'aire d'un triangle du plan, vue comme la moitié du produit extérieur entre les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) , formule utilisée par Bavard et Ghys.

Le lecteur alerte se doutera alors du résultat :

Proposition 2.12 *La forme A_C est de signature $(1, n-3)$.*

Preuve :

Pour le cas $n = 4$, l'aire est le déterminant d'une matrice 2×2 , qui est soit positif soit négatif, donc de signature $(1,1)$.

Pour n quelconque on calcule la signature par récurrence en "remplaçant" deux points singuliers par un troisième, ce qui permet de réduire le nombre de points singuliers. On choisit une métrique m et on coupe la sphère le long d'un segment géodésique tracé entre deux points singuliers dont les singularités sont d'angles α_1 et α_2 , telles que $\alpha_1 + \alpha_2 > 2\pi$.

Si n est supérieur à 4, il existe toujours deux singularités dont la somme des cône-angles est supérieure à 2π . Sinon, comme cette condition est équivalente au fait que la somme des courbures inférieure à 2π , on aurait $\sum_{i=1..4} k_i \geq 4\pi$, ce qui contredit la formule de Gauss-Bonnet, puisque comme n est supérieur à 4, il y a au moins une cinquième courbure qui fait que la somme totale des courbures est strictement supérieure à 4π .

On a alors entre les deux points singuliers deux segments géodésiques de même longueur. On va recoller le long de ces segments deux exemplaires d'un même triangle, dont les angles au sommet de l'arête que l'on colle sur les segments géodésiques sont $\pi - \alpha_1/2$ et $\pi - \alpha_2/2$. Un tel triangle (c'est-à-dire défini par la longueur d'une arête et les deux angles associés) existe toujours grâce à la condition $\alpha_1 + \alpha_2 > 2\pi$, qui indique que la somme des deux angles est bien inférieure à π . L'angle au troisième sommet de ce triangle est alors $(\alpha_1 + \alpha_2)/2 - \pi$. On identifie les deux autres arêtes de chaque triangle avec leur double et on obtient ainsi un cône. L'angle autour des deux points singuliers initiaux est maintenant 2π par construction, il n'y a donc plus de singularité, mais le sommet du cône est un nouveau point singulier de cône-angle $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$ (figure 6).

On obtient ainsi une nouvelle métrique avec $(n - 1)$ points singuliers que l'on note $p(m)$ (c'est un élément de $C(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$) et la signature de la forme d'aire sur $C(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ est $(1, (n - 1) - 3)$ par hypothèse de récurrence.

On note (v_1, \dots, v_{n-3}) les $n - 3$ nombres complexes nécessaires pour décrire la métrique $p(m)$. On note z_0 une image du nouveau sommet, et on peut choisir une triangulation telle que z_0 n'a d'arêtes en commun qu'avec les images de deux autres sommets z_3 et z_4 (on considère que tous les autres sommets sont très loin). Ainsi z_0 est le sommet de deux triangles d'une image d'une triangulation de $p(m)$: le triangle z_0, z_3, z_4 et le triangle $z_0, z_4, \rho(z_3)$, où $\rho(z_3)$ est l'image de z_3 par une rotation de centre z_0 et

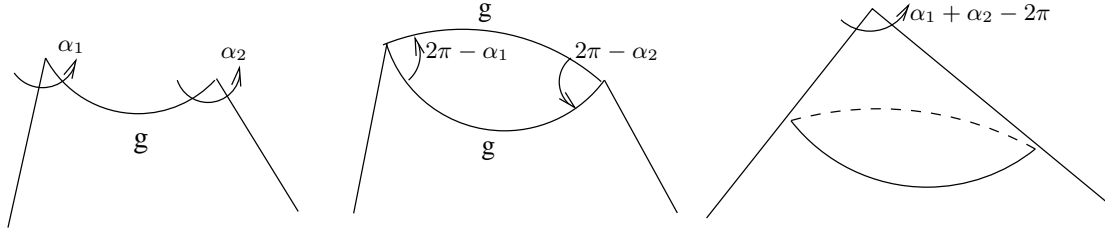


FIG. 6 -

d'angle $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$. Quitte à réordonner les termes, on suppose que v_1, v_2, v_3 sont les arêtes du premier triangle, et v_3, v_4, v_5 sont les arêtes du second triangle.

Les arêtes $(v_2, v_4, v_5, \dots, v_{n-3})$ et les sommets z_3, z_4 font partie de l'image d'une triangulation de m . On note v'_1 et v'_3 (resp. v'_5 et v'_6) les arêtes adjacentes à v_2 (resp. v_4) qu'il manque pour obtenir l'image d'une triangulation de m . On note z_1 (resp. z_2) le troisième sommet de ce triangle.

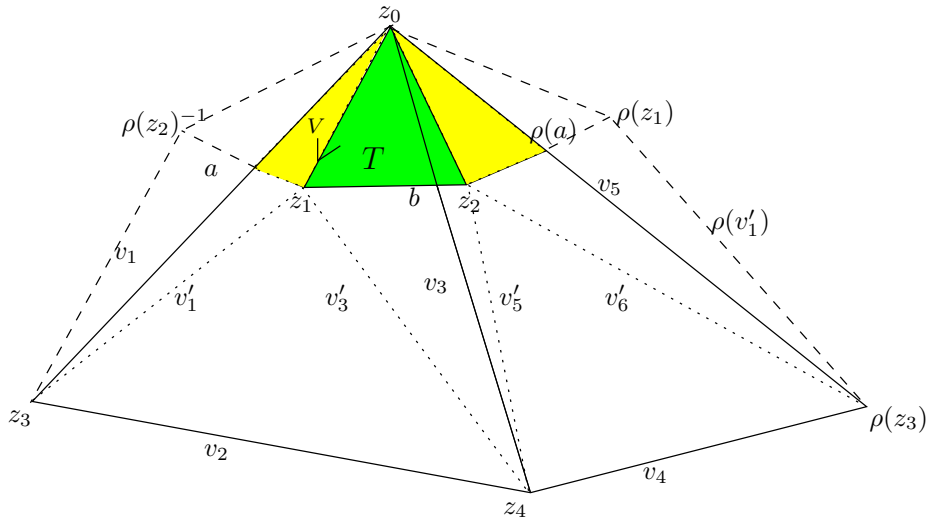


FIG. 7 -

On construit une arête V qui relie z_0 à z_1 . On note T le triangle z_0, z_1, z_2 . Comme les angles de ce triangles sont connus (par construction de $p(m)$), si on connaît V , on connaît bien sûr z_1 , mais aussi z_2 , et on connaît donc v'_1, v'_3, v'_5 et v'_6 . En d'autres termes, si on connaît (v_1, \dots, v_{n-3}, V) , on peut reconstruire m : ces $n - 2$ nombres complexes décrivent un cocycle associé à m .

On note a l'intersection de (z_0, z_3) avec $(z_1, \rho(z_2))^{-1}$ (donc $\rho(a)$ est l'intersection de $(z_0, \rho(z_3))$ avec $(z_2, \rho(z_1))$). Il se peut que (z_0, z_4) n'intersecte pas (z_1, z_2) , mais alors (z_0, z_3) l'intersecte, et il suffit de changer les notations. En effet, le triangle T ne peut être contenu à l'intérieur du triangle (z_0, z_3, z_4) par construction de $p(m)$.

L'aire du cocycle associé à $p(m)$ est par définition l'aire du cocycle associé à m plus l'aire de T et les aires de (z_0, a, z_1) et $(z_0, z_2, \rho(a))$. Si on identifie (z_0, a) et $(z_0, \rho(a))$, on obtient une autre copie de T , donc la différence entre les deux aires est deux fois l'aire de T .

L'aire du triangle T est donnée par une constante (qui ne dépend que des angles de T , qui sont fixés) multiplié par la norme au carré de V (formule de Héron). La quantité $\lambda|V|^2$ désigne ainsi deux fois l'aire de T , où λ est un réel fixé.

On note A la forme d'aire associée à $p(m)$ et \bar{A} celle associée à m , on a une décomposition orthogonale de \bar{A} :

$$\bar{A}(v_1, \dots, v_{n-3}, V) = A(v_1, \dots, v_{n-3}) - \lambda|V|^2. \tag{27}$$

La signature de \bar{A} est $(1, (n-1) - 3 + 1) = (1, n-3)$.

□

En fait on ne considère que les cocycles d'aire égale à -1 , puisque les métriques sur la sphère sont définies modulo les homothéties, ce qui revient à quotienter la structure affine complexe de $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ par \mathbb{C}^* . On obtient alors le modèle de l'hyperboloïde de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$. On rappelle que $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$ est de courbure sectionnelle non constante et comprise entre -4 et -1 , son groupe d'isométries est $PU(n-3, 1)$, et le groupe des isométries préservant l'orientation est $SU^+(n-3, 1)$ ([Eps87], [Gol99], [BH99]).

Par identification de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un recollement de morceaux de $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$ compatible avec la métrique hyperbolique complexe.

Théorème 2.13 *L'ensemble $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une variété modelée sur $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$.*

On va noter $\bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la complétion de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, ce qui signifie qu'on ajoute à $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ les métriques correspondant à la "fusion" de certains points singuliers :

Définition 2.14 *La strate de codimension 0 de $\bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.*

*La strate de codimension 1 de $\bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est constituée de métriques ayant $n-1$ points singuliers ; elles sont issues de métriques de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dont deux points singuliers sont suffisamment proches. Une métrique de la strate est la limite d'une suite de métriques définie par le rapprochement de ces points singuliers. Elle donne un nouveau point singulier (avec un nouveau cône-angle), appelé la **fusion** des deux points singuliers, qui définit la strate.*

La strate de codimension $p+1$, est constituée de métriques issues de la fusion d'un point singulier définissant une strate de codimension k et d'un point singulier définissant une strate de codimension k' , avec $k + k' = p$, $0 \leq k, k' \leq p-1$.

Lemme 2.15 *La fusion de deux points singuliers ne peut avoir lieu que si la somme de leurs cône-angles est strictement supérieure à 2π .*

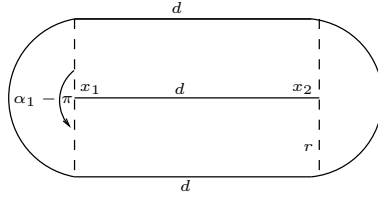


FIG. 8 –

Preuve : Notons d la longueur du segment géodésique entre les points singuliers x_1 et x_2 de cône-angles respectifs α_1 et α_2 . On considère un lacet à distance r de ce segment. La longueur de ce lacet est $2d + r(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi)$. Quand x_1 se rapproche de x_2 , d tend vers 0, et si $\alpha_1 + \alpha_2$ n'est pas strictement supérieur à 2π , la longueur du lacet devient négative.

□

Dans la preuve de 2.12 page 10 on a calculé que l'angle de la nouvelle singularité obtenue après fusion de deux points singuliers d'angles α_i et α_j est $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$.

Le fait vraiment remarquable est que l'angle dans $\bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ autour d'une strate de codimension 1 est le même que l'angle autour de la nouvelle singularité dans \mathbb{S}^2 qui définit cette strate :

Proposition 2.16 *Soit S une strate de $\bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans laquelle deux singularités de cône-angle α_i et α_j ont fusionné. Si $\alpha_i = \alpha_j$, alors l'angle autour de la strate est $\alpha_i - \pi$, sinon c'est $\alpha_i + \alpha_j - 2\pi$.*

Preuve : On considère la même situation et les mêmes notations que dans la preuve de la proposition 2.12 page 10. On déduit de la décomposition de la forme d'aire que $p(m)$ est le projeté orthogonal de m sur un hyperplan vectoriel de \mathbb{C}^{n-2} dont l'intersection avec l'hyperboloïde est la strate S . On note toujours $p(m)$ le normalisé pour la forme d'aire, qui est alors le projeté orthogonal de m sur S dans $\bar{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

L'idée est de faire "tourner" V autour de z_p . On choisit une valeur de départ pour V , que l'on note V_0 , et on définit $V_t = e^{it}V_0$ (on suppose que z_p est l'origine). Pour chaque valeur de t , on a une métrique de m_t de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dont la projection orthogonale sur S est $p(m)$. L'aire du triangle T ne varie pas par cette opération, donc tous les m_t sont à même distance $\sqrt{\lambda}|V|$ de $p(m)$ dans \mathbb{C}^{n-2} , et à une distance équivalente quand $|V|$ tend vers 0 dans $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on décrit ainsi un cercle autour de S . Il est paramétré dans \mathbb{C}^{n-2} par $\gamma(t) = (v_1, \dots, v_{n-3}, V_t)$. Si on écrit $V_0 = |V|e^{i\theta}$, on a $\gamma' = \frac{d}{dt}|_{t=0}\gamma(t) = (0, \dots, 0, i|V|e^{i\theta})$. Si les deux angles α_1 et α_2 sont égaux, on revient à la configuration initiale au bout d'un demi-tour,

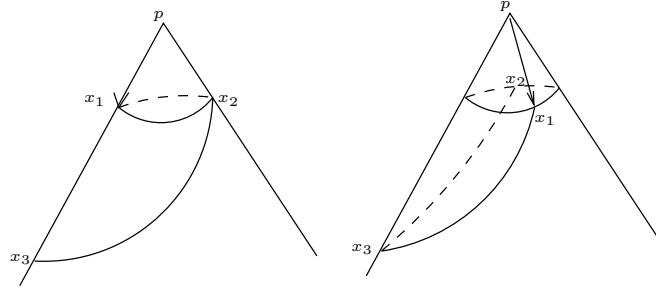


FIG. 9 -

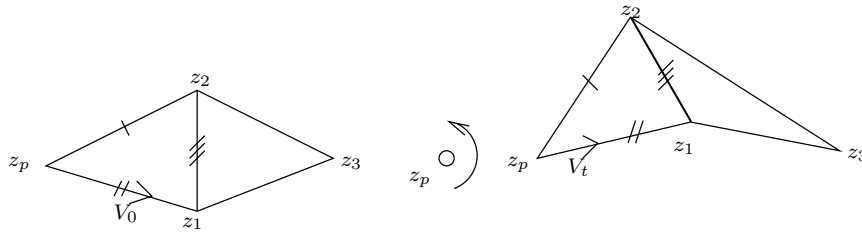


FIG. 10 -

c'est-à-dire un tour d'angle $1/2(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi) : V_{1/2(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi)} = V_{\alpha_1 - \pi} = V_0$. Sinon on a $V_{\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi} = V_0$. Dans les deux cas, on décrit une fois un cercle dans $\overline{C}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ autour de S .

On considère que les angles sont différents (la preuve est la même dans le cas d'angles égaux) et on note $\overline{\alpha}$ pour $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\pi$. La longueur du cercle dans $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est

$$\int_0^{\overline{\alpha}} A(\gamma')^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{\overline{\alpha}} \sqrt{\lambda}|V| = \sqrt{\lambda}\alpha|V|^{\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

L'angle autour de S est égal à la limite quand $|V|$ tend vers 0 de longueur divisée par le rayon, soit α . □

L'ensemble \mathbb{T}

Définition 2.17 On note $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ l'ensemble des métriques euclidiennes à n singularités coniques sur la sphère de cône-angles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tel que les points singuliers sont numérotés, c'est-à-dire que si x_i et x_j sont deux points singuliers d'une métrique m ayant les mêmes cône-angles, la métrique définie en interchangeant x_i et x_j est différente de m .

Par exemple, quand trois singularités ont le même cône-angle dans une métrique, elle correspondra à un seul point de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, mais il y aura six points dans $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, correspondant aux six façons d'ordonner les trois points singuliers. On définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. L'ensemble $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un quotient de $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pour la relation suivante :

Définition 2.18 Si m et m' sont deux éléments de $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, définis respectivement par $(x_1, \alpha_1), \dots, (x_n, \alpha_n)$ et $(x'_1, \alpha'_1), \dots, (x'_n, \alpha'_n)$, tel qu'il existe $s \in S_n$, un élément du groupe des permutations d'un ensemble à n éléments, tel que $(x'_{s(1)}, \dots, x'_{s(n)}) = (x_1, \dots, x_n)$ alors

$$m \sim m' \Leftrightarrow (\alpha'_{s(1)}, \dots, \alpha'_{s(n)}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (29)$$

On a $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) / \sim$. Dans la suite on écrira \mathbb{T} au lieu de $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et on note $\overline{\mathbb{T}}$ la complétion de \mathbb{T} .

3 Liens entre les deux constructions

3.1 Espace des métriques réelles

Polygones et métriques sur la sphère. Les deux précédents chapitres ont montré que, par des méthodes similaires, on obtient un polyèdre hyperbolique réel dans un cas, et un espace modelé sur l'espace hyperbolique complexe dans l'autre. La relation entre ces deux espaces vient de la relation entre un polygone et un polyèdre.

La métrique induite sur un polyèdre de \mathbb{R}^3 (convexe compact) par la métrique euclidienne est une métrique plate sur les faces et les arêtes du polyèdre et singulière sur les sommets, et l'angle de la singularité est égal à la somme des angles entre les arêtes de chaque face à ce sommet.

Chaque polyèdre de \mathbb{R}^3 à n sommets est topologiquement équivalent à la sphère et avec la métrique induite est un élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, où chaque α_i est la somme des angles des faces au $i^{\text{ème}}$ sommet du polyèdre. La réciproque est donnée par le théorème d'Aleksandrov qui sera énoncé page 16.

On peut considérer un polygone à n sommets comme un polyèdre particulier de \mathbb{R}^3 (un polyèdre dégénéré), en recollant le polygone et son image par $z \mapsto \bar{z}$ le long des arêtes correspondantes. On obtient un espace topologiquement équivalent à la sphère, et la métrique induite est localement euclidienne sur chacune des deux faces et des n arêtes, avec n singularités coniques d'angles deux fois celui au sommet considéré du polygone. Si $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont ses angles intérieurs, c'est un élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, avec la convention : $\alpha_i = 2\theta_i$.

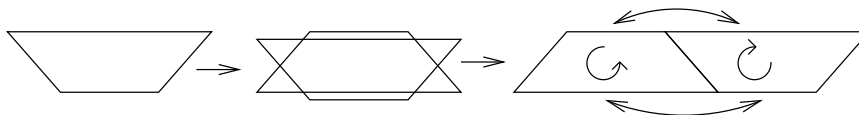


FIG. 11 –

Pour qu'un polygone soit convexe, il faut que la somme de ses angles extérieurs soit 2π . Or l'angle extérieur entre deux arêtes à un sommet est exactement la moitié de la courbure de la singularité correspondante : la formule de Gauss-Bonnet est bien vérifiée.

L'ensemble BG .

Définition 3.1 On note $BG(\theta_1, \dots, \theta_n)$ l'ensemble des polygones de \mathbb{R}^2 à angles intérieurs fixés et ordonnés $\theta_1, \dots, \theta_n$ tels que $\sum_{i=1}^n 2\pi - \theta_i = 2\pi$, modulo les rotations, translations et homothéties.

L'ensemble $BG(\theta_1, \dots, \theta_n)$ peut aussi se décrire comme un espace du type $P_{\vec{D}}$ (cf. première section) avec \vec{D} l'ensemble des demi-droites des directions des arêtes d'un polygone initial dont les angles intérieurs sont $\theta_1, \dots, \theta_n$. On peut décrire $BG(\theta_1, \dots, \theta_n)$ comme un polyèdre hyperbolique.

Si on permute l'ordre des angles, l'ensemble des demi-droites correspondant \vec{D} change, mais comme la liste d'angles reste la même, les polygones décrits seront toujours convexes, on a donc un autre polyèdre de type $P_{\vec{D}}$.

On va définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des polyèdres du type $BG(\theta_1, \dots, \theta_n)$, pour une liste d'angles $\theta_1, \dots, \theta_n$ fixée :

Si $\theta_i + \theta_{i+1} < \pi$, on note $BG(\theta_1, \dots, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ la face de codimension 1 du polyèdre $BG(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ correspondant à la dégénérescence de l'arête du polygone initial issue des angles θ_i et θ_{i+1} . Les

polyèdres $BG(\theta_1, \dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots, \theta_n)$ et $BG(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ sont différents mais l'un a une face de codimension 1 qui est isométrique à une face de codimension 1 de l'autre, et cette face est définie par $BG(\theta_1, \dots, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$. De plus, pour $\theta_1, \dots, \theta_n$ fixés, ce sont les deux seuls polyèdres de type BG ayant cette même face, et ils n'ont que cette face en commun. On dit qu'on recolle $BG(\theta_1, \dots, \theta_i, \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$ et $BG(\theta_1, \dots, \theta_{i+1}, \theta_i, \dots, \theta_n)$ si on recolle les deux polyèdres le long de la face commune $BG(\theta_1, \dots, \theta_i + \theta_{i+1}, \dots, \theta_n)$

On note \mathcal{G} la relation engendrée par le recollement. En particulier tous les polyèdres sont en relation, car pour une face de codimension 1 donnée, il existe toujours un polyèdre différent ayant la même face, il suffit d'inverser les deux angles concernés. C'est une relation d'équivalence, qui permet de définir un nouvel espace :

Définition 3.2 On note $BG_1(\theta_1, \dots, \theta_n)$ l'ensemble constitué de tous les polyèdres construits à partir de tous les polygones initiaux convexes que l'on peut obtenir avec n angles intérieurs fixés $(\theta_1, \dots, \theta_n)$, avec recollement des faces communes de codimension 1 :

$$BG_1(\theta_1, \dots, \theta_n) = \bigcup_{\sigma \in S_n} BG(\theta_{\sigma(1)}, \dots, \theta_{\sigma(n)}) / \mathcal{G}. \quad (30)$$

Puisque toutes les faces sont identifiées, il s'agit d'un recollement de polyèdres hyperbolique réels de dimension $n - 3$.

On peut même voir plus exactement qu'autour d'une face de codimension 2, définie par la dégénérescence de trois angles $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ du polygone initial, on identifie deux à deux les faces de codimension 1 de 6 polyèdres différents, correspondants aux 6 permutations de l'ordre des angles.

Par contre, pour une permutation cyclique des angles, on a deux fois le même polyèdre (ce qui correspond à une permutation cyclique des demi-droites associées $(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$), on introduit

$$BG_2(\theta_1, \dots, \theta_n) = \mathbb{Z}_n \backslash BG_1(\theta_1, \dots, \theta_n). \quad (31)$$

Pour un polygone donné appartenant à $BG_2(\theta_1, \dots, \theta_n)$, son image par $z \mapsto \bar{z}$ est aussi dans $BG_2(\theta_1, \dots, \theta_n)$, puisqu'il s'agit juste d'inverser l'ordre des angles. Ainsi, \mathbb{Z}_2 agit sur $BG_2(\theta_1, \dots, \theta_n)$, et l'ensemble

$$\mathbb{B}G(\theta_1, \dots, \theta_n) = BG_2(\theta_1, \dots, \theta_n) / \mathbb{Z}_2 \quad (32)$$

est formé de polyèdres dégénérés. Dans la suite, on écrira $\mathbb{B}G$ au lieu de $\mathbb{B}G(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Si $\theta_k = \theta_{k'}$, les polyèdres $BG(\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_{k'}, \dots, \theta_n)$ et $BG(\theta_1, \dots, \theta_{k'}, \dots, \theta_k, \dots, \theta_n)$ seront considérés comme deux polyèdres distincts. On note $\mathbb{B}G^\sim = \mathbb{B}G / \sim$ (\sim est la même relation que celle qui donne $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) / \sim$).

Proposition 3.3 L'ensemble $\mathbb{B}G$ se plonge isométriquement dans $\overline{\mathbb{T}}$ (et $\mathbb{B}G^\sim(\theta_1, \dots, \theta_n)$ se plonge isométriquement dans $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$).

Dans la section suivante, nous décrirons plus précisément cette inclusion.

Preuve : Il faut vérifier que l'immersion naturelle des polyèdres dégénérés dans les métriques sur la sphère est bien isométrique, or les métriques hyperboliques sont définies par les formes d'aire, et la forme d'aire sur les polygones est la restriction au plan réel de la forme d'aire sur les cocycles. □

Dans le diagramme suivant, $X \xrightarrow{/G} Y$ signifie $Y = X/G$.

$$\begin{array}{ccccccc} \bigcup_{\sigma \in S_n} BG(\theta_{\sigma(1)}, \dots, \theta_{\sigma(n)}) & \xrightarrow{/G} & BG_1(\theta_1, \dots, \theta_n) & \xrightarrow{\mathbb{Z}_n \backslash} & BG_2(\theta_1, \dots, \theta_n) & \xrightarrow{/\mathbb{Z}_2} & \mathbb{B}G(\theta_1, \dots, \theta_n) \hookrightarrow \overline{\mathbb{T}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ & & & & & & \downarrow / \sim \\ & & & & & & \mathbb{B}G^\sim(\theta_1, \dots, \theta_n) \hookrightarrow \overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{array}$$

La construction de Kapovich et Millson. On peut aussi trouver ce résultat (au quotient par \mathbb{Z}_\neq près semble-t-il) dans [KM95], qui part de l'étude d'ensembles de polygones à longueur des arêtes fixées.

Ils montrent que l'espace des modules est le même que celui des polygone à angles fixés que l'on étudie. Dans [KM96] ils étudient l'espace des modules des polygones de \mathbb{R}^3 .

3.2 Une forme réelle de $\overline{\mathbb{T}}$

Le théorème d'Aleksandrov. Comme annoncé, ce théorème permet de "voir" une métrique euclidienne à singularité conique sur la sphère comme un polyèdre (convexe). On se référera à [Bus58], page 128, pour un long schéma de démonstration et des références.

Théorème 3.4 (Aleksandrov) *Pour chaque métrique m localement euclidienne sur la sphère \mathbb{S}^2 avec des singularités à courbures singulières positives il existe un unique polyèdre de \mathbb{R}^3 , à isométrie près, qui peut être dégénéré, tel que la métrique induite sur son bord soit m .*

On note ϕ la symétrie des polyèdres de \mathbb{R}^3 par rapport à un plan, à isométrie près.

L'orientation des cocycles. On a défini l'ensemble des cocycles $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en partant d'une orientation sur la sphère, pour laquelle les cocycles sont d'aire positive. Si on fixe l'orientation inverse sur la sphère (et donc sur les triangulations), on obtient un nouvel ensemble de cocycles qui est en bijection avec le premier, et dont chaque cocycle est d'aire -1 pour la forme quadratique $-A$. On note le premier ensemble $\mathcal{Z}^+(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (que l'on notait jusque là $\mathcal{Z}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) et le second $\mathcal{Z}^-(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

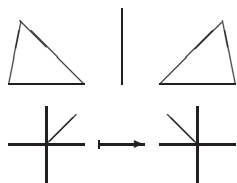
La symétrie sur les cocycles. On note T une triangulation orientée positive d'une métrique m , issue d'une triangulation des faces du polyèdre associé à m donné par le théorème d'Aleksandrov, et T^* une triangulation orientée négative d'une métrique m' . m' est la métrique correspondant à l'image par la symétrie ϕ du polyèdre correspondant à m , et T^* est la triangulation issue de l'image par ϕ de la triangulation des faces du polyèdre. On définit l'application

$$\begin{aligned} \phi_M : C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\rightarrow C(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ m &\mapsto m', \end{aligned} \quad (33)$$

qui est l'analogie de ϕ sur les cocycle, appelée symétrie sur les métriques :

définie par la symétrie sur les cocyles :

$$\begin{aligned} \phi_C : \mathcal{Z}^+(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sqcup \mathcal{Z}^-(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &\rightarrow \mathcal{Z}^-(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \sqcup \mathcal{Z}^+(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \left(Z : \begin{array}{c} T \rightarrow \mathbb{C} \\ e \mapsto Z(e) \end{array} \right) &\mapsto \left(\phi_C(Z) : \begin{array}{c} T^* \rightarrow \mathbb{C} \\ e \mapsto -\overline{Z(e)} \end{array} \right), \end{aligned} \quad (34)$$



où \sqcup désigne l'union disjointe. On remarque que les éléments de \mathcal{Z}^+ sont envoyés sur \mathcal{Z}^- et réciproquement.

Corollaire 3.5 *Les métriques induites sur des polyèdres dégénérés sont invariantes par ϕ_M .*

Preuve : En effet, le polyèdre qui représente un métrique issue d'un polygone est le polygone lui-même (doublé avec identification des côtés et une orientation différente sur chaque face). Donc à isométrie près, il est invariant par symétrie planaire. □

Définition 3.6 *Une **symétrie** σ sur une variété hyperbolique complexe est une involution isométrique anti-holomorphe (i.e. $d\sigma(iv) = -id\sigma(v)$). Une **forme réelle** est l'ensemble des points fixes d'une symétrie.*

Proposition 3.7 *L'application ϕ_C est une symétrie.*

Preuve : Il est clair que ϕ_C est involutive et anti-holomorphe, donc il faut juste vérifier qu'elle est isométrique.

Soient $\{e_1, e_2, e_3\}$ les arêtes d'un triangle orientés dans le sens direct, pour un triangle d'une triangulation associée à un cocycle Z .

Le triangle $\{\phi_C(Z)(e_1), \phi_C(Z)(e_2), \phi_C(Z)(e_3)\}$ est donc un triangle orienté négativement, que l'on identifie au triangle orienté positivement $\{\phi_C(Z)(e_2), \phi_C(Z)(e_1), \phi_C(Z)(e_3)\}$ et il reste à calculer :

$$\begin{aligned} -4A_C(\phi_C(Z)) &= \sum i\phi_C(Z)(e_2)\overline{\phi_C(Z)(e_1)} - i\phi_C(Z)(e_1)\overline{\phi_C(Z)(e_2)} \\ &= \sum i\overline{(-Z(e_2))}\overline{(-Z(e_1))} - i\overline{(-Z(e_1))}\overline{(-Z(e_2))} \\ &= \sum iZ(e_1)\overline{Z(e_2)} - iZ(e_2)\overline{Z(e_1)} = -4A_C(Z). \end{aligned} \tag{35}$$

□

Il peut exister des métriques n'étant pas issues de polygones et qui sont des points fixes de ϕ_M . En effet, les points singuliers des métriques de $\overline{\mathcal{C}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ne sont pas numérotés, si on intervertit deux points singuliers qui ont le même cône-angle, on ne change pas la métrique.

Par exemple, considérons une métrique avec 8 points singuliers, tous de même courbure singulière, et telle que le polyèdre qui la représente soit un cube. A ce moment là il n'y a aucun moyen de distinguer cette métrique (qui n'est pas issue d'un polygone) de son image par ϕ . Par contre, si on numérote les points singuliers, on aura bien deux métriques différentes, puisque la symétrie change l'emplacement des points.

Avec une numérotation des points, les seuls polyèdres de \mathbb{R}^3 invariants par la symétrie sont les polygones et donc les seules métriques qui sont des points fixes de ϕ dans $\overline{\mathbb{T}}$ sont les métriques issues des polygones. Or par construction, $\mathbb{B}\mathbb{G}$ contient toutes les métriques de ce type qu'il est possible de construire avec n angles donnés et leurs dégénérescences. Donc $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est exactement l'ensemble des points fixes de ϕ . On a montré le

Théorème 3.8 *L'ensemble $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est une forme réelle de $\overline{\mathbb{T}}$.*

Nous verrons dans la section 4 que $\overline{\mathbb{T}}$ est dans certains cas un orbifold hyperbolique complexe. La construction que nous venons de faire permet donc de décrire une composante d'une forme réelle de certains orbifolds hyperboliques complexes, les orbifolds de Thurston $\overline{\mathcal{C}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (ceux dont le revêtement fini $\overline{\mathbb{T}}$ est un orbifold). On peut même se demander s'il n'est pas possible de décrire des formes réelles de tous les orbifolds de Thurston par des considérations analogues, mais il faudrait étendre la construction que l'on a faite à certains polyèdres symétriques.

4 Structures métriques de $\mathbb{B}\mathbb{G}$ et \mathbb{T}

Certains résultats issus de l'article de Thurston seront admis pour cette partie.

4.1 Orbifolds et cône-variétés

(X, G)-variétés et orbifolds. Soit X une variété riemannienne complète de dimension n et G un groupe agissant sur X . Nous nous placerons dans le cas où G est un sous-groupe du groupe des isométries de X . Une (X, G) -variété M est un espace muni d'un atlas dont les cartes sont difféomorphes à des ouverts de X et dont les changements de cartes sont des éléments de G . On munit M de la métrique induite par celle de X . Cette définition est un cas particulier de (X, G) -structures, pour plus de détails voir [Thu97a], [Thu97b], [BP92], [DCS00], [Rat94]. On attire l'attention sur le fait qu'ici X n'est pas forcément un espace à courbure constante.

Un (X, G) -orbifold (on peut trouver le terme orbivariété en français) a la même structure qu'une (X, G) -variété, à la différence que les ouverts des cartes de l'orbifold ne sont plus difféomorphes à des ouverts de X mais à des quotients des ouverts de X par des sous-groupes discrets de G , ces groupes étant différents de point en point. On trouvera une définition complète dans [Thu97b], et de manière très développée dans [DCS00]. Dans la suite on écrira orbifold pour (X, G) -orbifold. Un orbifold est un **bon orbifold** si il est isométrique à un quotient global de X par un sous-groupe de G .

Proposition 4.1 ([Rat94], §13.3) *Si le revêtement universel d'un orbifold est métriquement complet, alors c'est un bon orbifold.*

La notion d'orbifold est une généralisation de la notion de variété. On peut encore "généraliser" en introduisant les cône-variétés.

(X, G)-cône-variété. Voici la définition "fairly intuitive" - à une correction près - que Thurston donne dans son article ([Thu98], p. 523). Pour une définition dans le cas où X est à courbure constante (donc en particulier triangulable géodésiquement), on peut voir [DCS00] ou [BLP02].

Définition 4.2 Pour un point p de X , la **sphère normale** (ou **link**) en p est l'espace des germes de segments géodésiques d'origine p de vitesse unitaire.

Pour un point p fixé, la sphère normale en p est une variété de dimension la dimension de X moins 1, que l'on note X_p .

Soit G_p le stabilisateur de p . C'est un sous-groupe du groupe des isométries de X_p , on peut donc parler de (X_p, G_p) -structure.

On définit une (X, G) -cône-variété par récurrence sur la dimension. Si X est de dimension 1, une (X, G) -cône-variété est une (X, G) -variété.

Soit X de dimension n et Y est une (X_p, G_p) -cône-variété compacte et connexe (cet objet est bien défini puisque de codimension 1). On va construire le cône de rayon r (ou r -cône) de Y . On choisit r assez petit de telle sorte que la restriction à la boule de rayon r de $T_p X$ de l'application exponentielle de X en p soit un plongement sur X . On voit à partir de maintenant la sphère normale X_p de X en p comme la sphère de rayon r de $T_p X$.

Y étant une (X_p, G_p) -variété, il est constitué d'ouverts de X_p recollés d'une certaine façon. On recolle les cônes de $T_p X$ définis par ces ouverts de la même façon que les ouverts de X_p sont recollés pour former Y . Cette opération est bien définie, puisque G_p agit à la fois sur l'ensemble des directions des rayons géodésiques et sur ces rayons.

On plonge ensuite les cônes de $T_p X$ dans X à l'aide de l'application exponentielle, et on les recolle de la même façon que dans $T_p X$: on obtient ainsi le r -cône de Y .

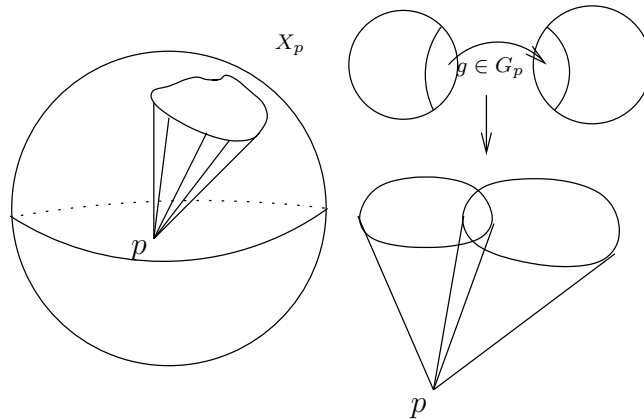


FIG. 12 –

Définition 4.3 Une (X, G) -cône-variété est un espace tel que chaque point ait un voisinage isométrique au r -cône d'une (X_p, G_p) -cône-variété¹.

Si le point a un voisinage isométrique à un voisinage de X , il sera dit **régulier**, et **singulier** sinon. Les points réguliers sont denses, et la cône-variété est la complétion de l'ensemble de ses points réguliers (récurrence sur la dimension).

¹Il semble qu'il y ait une coquille dans l'article de Thurston, page 524 ligne 4, il faudrait lire "[...] connected (X_p, G_p) -cone-manifold" au lieu de "[...] connected (X_p, G_p) -manifold".

Exemples. Dans le cas où l'espace modèle est à courbure constante, une cône-variété est un recollement de simplexes. Quand la courbure n'est pas constante, il n'existe pas forcément d'hyperplans totalement géodésiques. Par exemple, il n'y a pas de sous ensembles totalement géodésiques de codimension réelle 1 dans $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}$, pour $n > 4$.

Chaque élément de $C(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une cône-variété euclidienne de dimension 2. Il n'y a que 17 orbifolds euclidiens compacts de dimension 2 à isométries près, et quatre classes sont données par les espaces du type que nous considérons : $C(\pi, \pi, \pi, \pi)$, $C(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$, $C(\frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{\pi}{3})$ et $C(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Hormis ces cas, les sphères euclidiennes à singularités coniques ne sont pas des orbifolds.

Dans le cas d'un polyèdre de Coxeter, l'espace quotient par le groupe des isométries engendrées par les réflexions par les faces du polyèdre est un orbifold ([Rat94], §13.5, théorème de Poincaré).

Les orbifolds sont des cône-variétés. En effet, si O est un (X, G) -orbifold, un voisinage d'un point u de O est isométrique au quotient du voisinage d'un point p de X par un sous-groupe discret Γ de G . En fait, il existe un voisinage U de u isométrique au quotient d'un voisinage de p par Γ_p , le stabilisateur de p dans Γ , qui est un groupe fini ([Rat94], théorème 13.2.3). Γ_p agit sur la sphère normale X_p , et X_p/Γ_p est un orbifold. Ainsi, U est isométrique au cône de l'orbifold X_p/Γ_p .

Codimension des singularités

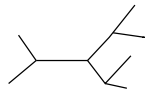
Définition 4.4 *Un voisinage singulier d'un point p est un voisinage de p isométrique au cône d'une cône-variété. Il est dit centré en p si p est le sommet du cône.*

Si, pour un voisinage assez petit, le seul voisinage singulier d'un point singulier p est un voisinage centré en p , alors p est dit de codimension n .

Sinon il existe un point q tel que p est contenu dans un voisinage singulier de q . On définit alors la codimension de p de façon inductive : le rayon géodésique partant de q et passant par p est un point singulier y de la (X_q, G_q) -cône-variété. La codimension de p est alors la codimension de y .

Définition 4.5 *Une strate S de codimension k est une variété (sans bord) connexe de dimension $n - k$ contenue dans le lieu singulier de la cône-variété, et maximale pour l'inclusion, constituée de points singuliers de codimension exactement k .*

La **sphère normale** (ou *link*) de S en un point x de S est l'espace des germes de segments géodésiques d'origine x de vitesse unitaire orthogonaux à S . C'est une (\mathbb{S}^{k-1}, G) -cône-variété de dimension $k-1$, avec G un sous-groupe de $SO(n)$, et un voisinage du point singulier x est un cône de la sphère normale. On peut parler de la sphère normale de S car elles sont indépendantes du point x à isométries près.



Par exemple, si l'arbre ci-contre représente le lieu singulier d'une cône-variété de dimension 3, chaque arête (sans les sommets) de l'arbre est une strate de codimension 2, et les sommets sont des strates de codimension 3.

Définition 4.6 *Le cône-angle autour d'une strate singulière est la limite quand ϵ tend vers 0 de la longueur divisée par ϵ d'une courbe qui fait le tour de la strate en restant à distance ϵ .*

Le théorème de Poincaré-Thurston Le théorème suivant va s'avérer très utile par la suite, il est donné par Thurston à la page 532 de [Thu98]. Il s'agit en fait d'une généralisation d'un théorème de Poincaré.

Théorème 4.7 *Une cône-variété C est un orbifold si et seulement si toutes les strates de codimension 2 ont des singularités coniques d'angles de la forme $2\pi/n$ avec n entier.*

Preuve : Un groupe d'isométries qui préserve l'orientation et laisse invariant un sous-espace S de codimension k est un sous-groupe de $SO(k)$. En effet, dans l'espace tangent, ce groupe d'isométries agit sur \mathbb{R}^k (le complémentaire du tangent à S) et préserve l'orientation.

Supposons que C soit un orbifold, et S une strate de codimension 2. Les isométries qui laissent S invariante sont un sous-groupe de $SO(2)$, et comme ce sous-groupe doit être fini, il est nécessairement de la forme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ainsi l'angle autour de S est de la forme $2\pi/n$.

Pour la réciproque, on procède par récurrence sur la codimension de la strate singulière de la cône-variété C . Si l'angle autour de la strate de codimension 2 est $2\pi/n$, alors les voisinages des points de cette strate sont des quotients d'ouverts par $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ce qui est une structure d'orbifold.

On suppose que C a une structure d'orbifold dans le voisinage de toutes ses strates jusqu'à la codimension k . Soit S une strate de codimension $k+1$, x un point de S et U un voisinage de x dans C . On peut écrire ce voisinage comme un fibré au-dessus d'un voisinage de x dans S dont la fibre est le cône de N^k , la sphère normale à S .

On note N^i la sphère normale d'une strate de codimension $i+1$. Comme toutes les strates de codimension inférieures à $k+1$ de C ont une structure d'orbifold, les N^i , $i < k$ sont des orbifolds. Les strates de N^k sont des N^i , donc N^k est un orbifold.

Comme le revêtement universel de N^k est \mathbb{S}^k , qui est métriquement complet, alors N^k est un bon orbifold : il s'écrit $N^k = \mathbb{S}^k/G$, où G est un sous-groupe de $SO(n)$. L'action de G s'étend au cône de N^k , donc U est le quotient d'un voisinage de l'espace modèle X par G .

□

4.2 Les orbifolds $\mathbb{B}\mathbb{G}$ et \mathbb{T}

On peut maintenant énoncer le principal résultat de l'article de Thurston :

Théorème 4.8 ([Thu98], 3.4 et 0.2) *L'ensemble $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une cône-variété hyperbolique complexe de dimension (complexe) $n-3$ de volume fini.*

Cette cône-variété est un orbifold si et seulement si, pour chaque paire k_i, k_j dont la somme s est inférieure à 2π , on a :

- (i) *Soit $k_i \neq k_j$ et alors $(2\pi - s)$ divise 2π*
- (ii) *Soit $k_i = k_j$ et alors $(2\pi - s)/2 = (\pi - k_i)$ divise 2π*

Éléments de la preuve :

Nous admettons ici que $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une cône-variété ([Thu98], 3.4). En terme de cône-angles, le cas i) s'écrit

$$\begin{aligned}
 & 2\pi - (k_i + k_j) | 2\pi \\
 \text{c.a.d. } & \pi + \alpha_i - 2\pi + \alpha_j - 2\pi | 2\pi \\
 \text{c.a.d. } & \alpha_i + \alpha_j - 2\pi | 2\pi \\
 \text{c.a.d. } & \alpha_{ij} = \frac{2\pi}{k}, k \in \mathbb{N},
 \end{aligned} \tag{36}$$

c'est-à-dire que l'angle de la singularité autour de la strate de codimension 1 (réelle 2) doit être de la forme $\frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Le résultat 2.16 et le théorème de Poincaré-Thurston 4.7 indiquent alors qu'il s'agit d'un orbifold.

Comme pour les polyèdres de Bavard et Ghys, $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ n'a qu'un nombre fini de points à l'infini et est compact s'il n'a pas de points à l'infini. Un point à l'infini correspond aux cas où les métriques dégénèrent en une métrique de diamètre infini. Ceci arrive quand des métriques s'approchent de cylindres euclidiens (qui sont "très long et très fins"), ce qui n'est possible que quand la somme des courbures à chaque extrémité du "cylindre" est 2π , donc quand l'ensemble des courbures peut se décomposer en deux sous-ensembles dont la somme des courbures est 2π . Il faut vérifier que les ensembles de telles métriques sont connexes ([Thu98], p. 534). On a ainsi un moyen simple de déterminer les cône-variétés compactes : c'est le cas si et seulement si la liste des angles ne peut s'écrire en deux listes disjointes dont la somme de chacune est 2π .

□

Comme $\overline{C}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est métriquement complet, c'est un bon orbifold :

Corollaire 4.9 *Si $\overline{\mathcal{C}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est un orbifold, il est de la forme*

$$\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}/\Gamma \quad (37)$$

où Γ est un sous-groupe discret de $SU^+(n-3, 1)$.

Ceci conduit immédiatement à l'énoncé :

Théorème 4.10 *L'ensemble $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est une cône-variété hyperbolique complexe de dimension (complexe) $n-3$ de volume fini.*

Cette cône-variété est un orbifold si et seulement si, pour chaque paire k_i, k_j dont la somme s est inférieure à 2π , on a $(2\pi - s)$ divise 2π . Dans ce cas, $\mathbb{T}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est de la forme $\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-3}/\Gamma$ où Γ est un sous-groupe discret de $SU^+(n-3, 1)$.

Le fait remarquable étudié dans la proposition 2.16 est que dans le cas où les cône-angles sont différents, l'angle de la singularité autour de la strate de la cône-variété est le même que l'angle de la singularité autour du nouveau point singulier qui définit la strate.

Or c'est justement la construction de \mathbb{T} qui permet de se ramener à ce cas, puisqu'on numérote les points singuliers, ainsi le cas d'égalité entre deux cône-angle n'est plus pris en compte.

C'est la différence essentielle entre \mathbb{T} et $\overline{\mathcal{C}}$: pour deux singularités, dans le cas où $\alpha_i = \alpha_j$, l'angle de la singularité autour de la strate de \mathbb{T} correspondante est $\alpha_i + \alpha_j - 2\pi$, et non plus $\alpha_i - \pi$ comme dans le cas de $\overline{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire que l'on double la valeur de cet angle. Ainsi, les conditions pour que \mathbb{T} soit un orbifold sont plus restrictives que pour $\overline{\mathcal{C}}$.

Voici, parmi les 97 cas donnés par Thurston où $\overline{\mathcal{C}}$ est un orbifolds, les 36 où \mathbb{T} est un orbifold (les numéros renvoient à ceux du tableau donné dans [Thu98]) :

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 57, 65, 66, 67, 68, \\ &69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 78, 79, 85, 89. \end{aligned} \quad (38)$$

Le cas $\mathbb{B}\mathbb{G}$.

Proposition 4.11 *L'ensemble $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est une cône-variété hyperbolique de volume fini.*

Dans le cas où c'est un orbifold, il est de la forme

$$\mathbb{H}^2/\Gamma^{\mathbb{R}} \quad (39)$$

où $\Gamma^{\mathbb{R}}$ est un sous-groupe discret de $SO^+(1, n-3)$.

Intéressons nous maintenant au cas où le polyèdre de Bavard et Ghys est de Coxeter. C'est le cas si les angles dièdres entre deux faces sont de la forme $2\pi/k$, avec k entier. Bavard et Ghys ont montré que l'angle dièdre entre deux faces du polyèdre est donné explicitement par la façon de dégénérer de deux arêtes consécutives du polygone. Au niveau des métriques cela correspond à la fusion de trois singularités dont les angles sont données par les angles intérieurs successifs $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ du polygone. La fusion est dans une strate de codimension complexe 2, réelle 4. La strate de codimension réelle 2, celle qui détermine la structure d'orbifold pour la cône-variété de Thurston, n'intervient donc pas a priori, ce qui donne lieu à trois remarques :

- Bien que la construction de Bavard et Ghys puisse être vue comme analogue à la construction de Thurston, il n'y a pas de liens directs entre leurs théorèmes respectifs.
- Sur le polygone, le nouvel angle obtenu après dégénérescence de deux arêtes consécutives est $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 2\pi$, mais il n'a a priori pas de rapport avec l'angle dièdre des deux faces. On n'est donc pas plus avancé pour un calcul simple du birapport en terme d'angles des droites.
- Que la cône-variété $\overline{\mathcal{C}}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soit ou non un orbifold n'a pas de rapport direct avec le fait que le polyèdre soit de Coxeter ou non, voir plus loin.

S'il n'y a pas de lien entre les polyèdres de Bavard et Ghys et les cône-variété de Thurston, on se demande si il peut y en avoir entre $\mathbb{B}\mathbb{G}$, qui est une cône-variété par construction, et \mathbb{T} . Cette question est abordée dans la section suivante.

Le fait que les polyèdres soient ou non de Coxeter n'a pas de rapport avec le fait que $\mathbb{B}\mathbb{G}$ soit ou non un orbifold, puisqu'autour d'une même face de codimension 2 il y a en général plusieurs faces identifiées,

donc même si aucun angle dièdre n'est de la forme $2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$ (i.e. il n'y a pas de polyèdre de Coxeter), leur somme peut être de la forme $2\pi/k$, $k \in \mathbb{N}$ (i.e. $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est un orbifold), et inversement tous les polyèdres peuvent être de Coxeter sans que $\mathbb{B}\mathbb{G}$ soit un orbifold.

On pourrait aussi théoriquement calculer l'angle autour de la face de codimension 2 en additionnant les 6 angles dièdres, mais cela semble compliqué en pratique puisque la formule pour calculer les angles dièdres du théorème de Bavard et Ghys n'est pas très maniable.

On peut se demander si l'analogie du théorème de Thurston dans le cas $\mathbb{B}\mathbb{G}$ est vrai, c'est-à-dire si pour avoir des exemples d'orbifolds hyperboliques réels, il suffit de trouver des listes d'angles tels que pour chaque triplet $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tel que la somme soit strictement supérieure à 4π , l'angle $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 4\pi$ est de la forme $2\pi/k$, avec k entier positif. Or ceci est faux, la quantité $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 4\pi$ n'a aucun rapport avec la somme des angles dièdres, on peut facilement trouver des contre-exemples.

Pour conclure cette partie, on démontre le résultat suivant, dont la conséquence directe est que la liste d'orbifolds de la forme \mathbb{T} , donnée précédemment, fournit autant d'exemples d'orbifolds hyperboliques (réels).

Théorème 4.12 *Une forme réelle d'un bon orbifold hyperbolique complexe est un bon orbifold hyperbolique réel.*

On note $M_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\mathbb{H}^n/\Gamma$ où Γ est un groupe discret agissant par isométries sur l'espace hyperbolique complexe et on note π la projection de celui-ci sur $M_{\mathbb{C}}$ (les isométries considérées ici préservent l'orientation, puisque les orbifolds sont orientés). $M_{\mathbb{C}}$ est un orbifold hyperbolique complexe, on note $M_{\mathbb{C}}^o$ l'ensemble de ses points réguliers, σ une symétrie de $M_{\mathbb{C}}$ (au sens où on l'avait défini) et $M_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des points fixes de σ . Soit x_0 un point de $M_{\mathbb{C}}^o$ qui appartient à $M_{\mathbb{R}}$ et $y_0 \in \mathbb{C}\mathbb{H}^n$ un relevé de x_0 , on définit $\tilde{\sigma}$ comme étant l'unique relevé à $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ de σ tel que $\tilde{\sigma}(y_0) = y_0$. Ce relevé est bien défini sur $M_{\mathbb{C}}^o$, et se prolonge par densité à tout $M_{\mathbb{C}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \mathbb{C}\mathbb{H}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\sigma} & M_{\mathbb{C}} \end{array} \quad (40)$$

Proposition 4.13 *L'application $\tilde{\sigma}$ est une symétrie.*

Preuve : Par relèvement, $\tilde{\sigma}$ est isométrique et anti-holomorphe.

Il reste à vérifier que c'est une involution. On va montrer que l'espace

$$\Omega = \{y \in \mathbb{C}\mathbb{H}^n \mid \tilde{\sigma}^2(y) = y\} \quad (41)$$

(qui est non-vidé puisqu'il contient y_0) est ouvert et fermé. Ω est fermé par continuité de $\tilde{\sigma}$. Pour montrer que Ω est ouvert, on introduit

$$\Omega' = \{y \in \mathbb{C}\mathbb{H}^n \mid \pi(y) \in M_{\mathbb{C}}^o : \tilde{\sigma}^2(y) = y\} = \Omega \cap \pi^{-1}(M_{\mathbb{C}}^o). \quad (42)$$

Soit $y \in \Omega'$, on note $(y_n)_n$ une suite de points de Ω' qui convergent vers y et on pose $x_n = \pi(y_n)$, $\forall n$. Comme σ est ouverte, pour n assez grand $\tilde{\sigma}(y_n)$ converge vers $\tilde{\sigma}(y)$ et donc $\tilde{\sigma}^2(y_n)$ converge vers $\tilde{\sigma}^2(y) = y$: $\tilde{\sigma}^2(y_n)$ converge vers y' . De plus, comme $\sigma^2(x_n) = x_n \forall n$, $\tilde{\sigma}^2(y_n)$ et y' sont dans la même orbite pour tout n . Les orbites étant discrètes, $\tilde{\sigma}^2(y_n) = y_n$ pour n assez grand. Ce qui signifie que Ω' est ouvert, et par densité de $M_{\mathbb{C}}^o$, Ω est ouvert. □

Or les formes réelles de $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ sont isométriques à \mathbb{H}^n . En effet, les espaces tangents des formes réelles sont des sous-espaces réels de dimension (réelle) n des espaces tangents de $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ et les isométries hyperboliques complexes agissent de manière transitive sur ces espaces. Il y a en fait une correspondance entre les sous-espaces réels de dimension (réelle) n des espaces tangents de $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ et les formes réelles de $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$ (voir [Gol99], chap. 3). Ainsi, les formes réelles sont toutes isométriques. Pour conclure il suffit de voir que la forme réelle pour la symétrie issue de l'application $z \mapsto \bar{z}$ de \mathbb{C}^{n+1} dans \mathbb{C}^{n+1} est l'espace hyperbolique réel.

A partir de maintenant, \mathbb{H}^n désigne précisément l'ensemble des points fixes de $\tilde{\sigma}$. On définit

$$\Gamma_{\mathbb{R}} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\mathbb{H}^n) = \mathbb{H}^n\}, \quad (43)$$

qui est isomorphe à un sous-groupe des isométries de \mathbb{H}^n .

Lemme 4.14 *Pour tout y de $\mathbb{C}\mathbb{H}^n$,*

- 1) $\sigma(\pi(y)) = \pi(\tilde{\sigma}(y))$;
- 2) $y \in \mathbb{H}^n \Rightarrow \pi(y) \in M_{\mathbb{R}}$;
- 3) $\pi(y) \in M_{\mathbb{R}} \Rightarrow y \in \Gamma\mathbb{H}^n$.

La première égalité est la définition de relevé, et les deux implications se vérifient directement, en utilisant le fait que σ et $\tilde{\sigma}$ sont des involutions. Il vient naturellement que

$$M_{\mathbb{R}} = \Gamma\mathbb{H}^n/\Gamma = \mathbb{H}^n/\Gamma_{\mathbb{R}}, \quad (44)$$

ce qui conclut la preuve du théorème 4.12.

5 Remerciements

Je me dois de signaler que l'idée de départ est de Jean-Marc Schlenker, de l'Université Paul Sabatier de Toulouse, et rien n'aurait été possible sans ses explications, son écoute patiente, sa disponibilité et sa volonté de voir ce travail mené à terme. Je dois aussi remercier Bruno Colbois de l'Université de Neuchâtel et Alessandra Iozzi de l'ETH de Zürich pour les discussions que j'ai eu avec eux, qui m'ont permis de préciser certaines parties, ainsi que Michel Boileau, Philippe Eyssidieux et Vincent Guirardel pour leurs remarques.

Références

- [BG92] Christophe Bavard and Étienne Ghys. Polygones du plan et polyèdres hyperboliques. *Geom. Dedicata*, 43(2) :207–224, 1992.
- [BH99] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric Spaces of Non-positive Curvature*. Springer Verlag, 1999.
- [Bir74] Joan S. Birman. *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 82.
- [BLP02] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti. Geometrization of 3-dimensional orbifolds, part i : geometry of cone-manifolds. 2002.
- [BP92] R. Benedetti and C. Petronio. *Lectures on hyperbolic geometry*. Springer Verlag, 1992.
- [Bus58] Herbert Busemann. *Convex surfaces*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 6. Interscience Publishers, Inc., New York, 1958.
- [DCS00] Cooper D., Hodgson C., and Kerckhoff S. *Three-dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds*. MJS, 2000.
- [DM86] P. Deligne and G. D. Mostow. Monodromy of hypergeometric functions and nonlattice integral monodromy. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (63) :5–89, 1986.
- [Eps87] D.B.A. Epstein. Complex hyperbolic geometry. *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space*, 111 :93–111, 1987.
- [FI] F. Fillastre and A. Iozzi. The moduli space of boundary compactifications of $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$.
- [Gol99] William M. Goldman. *Complex Hyperbolic Geometry*. Oxford Science Publications, 1999.
- [ILTC01] C. Indermitte, Th. M. Lieblich, M. Troyanov, and H. Cléménçon. Voronoi diagrams on piecewise flat surfaces and an application to biological growth. *Theoret. Comput. Sci.*, 263(1-2) :263–274, 2001. Combinatorics and computer science (Palaiseau, 1997).

- [IP99] Alessandra Iozzi and Jonathan A. Poritz. The moduli space of boundary compactifications of $SL(2, \mathbf{R})$. *Geom. Dedicata*, 76(1) :65–79, 1999.
- [KM95] Michael Kapovich and John Millson. On the moduli space of polygons in the Euclidean plane. *J. Differential Geom.*, 42(2) :430–464, 1995.
- [KM96] Michael Kapovich and John J. Millson. The symplectic geometry of polygons in Euclidean space. *J. Differential Geom.*, 44(3) :479–513, 1996.
- [KNY99a] Sadayoshi Kojima, Haruko Nishi, and Yasushi Yamashita. Configuration spaces of points on the circle and hyperbolic Dehn fillings. In *The Proceedings of the Conference on Geometric Structures on Manifolds (Seoul, 1997)*, volume 46 of *Lecture Notes Ser.*, pages 151–157, Seoul, 1999. Seoul Nat. Univ.
- [KNY99b] Sadayoshi Kojima, Haruko Nishi, and Yasushi Yamashita. Configuration spaces of points on the circle and hyperbolic Dehn fillings. *Topology*, 38(3) :497–516, 1999.
- [Koj01] Sadayoshi Kojima. Complex hyperbolic cone structures on the configuration spaces. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, 32(suppl. 1) :149–163 (2002), 2001. Dedicated to the memory of Marco Reni.
- [KY93] Sadayoshi Kojima and Yasushi Yamashita. Shapes of stars. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117(3) :845–851, 1993.
- [Rat94] John G. Ratcliffe. *Foundations of hyperbolic manifolds*, volume 149 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Thu97a] William P. Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. <http://www.msri.org/gt3m>, 1997.
- [Thu97b] William P. Thurston. *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*, volume 35 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Edited by Silvio Levy.
- [Thu98] William P. Thurston. Shapes of polyhedra and triangulations of the sphere. In *The Epstein birthday schrift*, volume 1 of *Geom. Topol. Monogr.*, pages 511–549 (electronic). Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998.
- [Tro86] Marc Troyanov. Les surfaces euclidiennes à singularités coniques. *Enseign. Math. (2)*, 32(1-2) :79–94, 1986.
- [Tro91] Marc Troyanov. Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2) :793–821, 1991.
- [YNK02] Yasushi Yamashita, Haruko Nishi, and Sadayoshi Kojima. Configuration spaces of points on the circle and hyperbolic Dehn fillings. II. *Geom. Dedicata*, 89 :143–157, 2002.