Une inégalité du type Payne-Polya-Weinberger pour le laplacien brut

Bruno Colbois

July 17, 2002

Abstract

Let us consider a riemannian vector bundle E with compact basis (M, g) and the rough laplacian $\bar{\Delta}$ associated to a connection D on E. We prove that the eigenvalues of $\bar{\Delta}$ are bounded above by a function of the first eigenvalue and of the geometry of (M, g), but independently of the choice of the connection D.

1 Introduction

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné à bord lisse. Notons $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ le spectre du laplacien de U avec les conditions au bord de Dirichlet (c'est à dire que le laplacien agit sur les fonctions s'annulant au bord de U). Alors on a la relation suivante, dite inégalité de Payne-Polya-Weinberger, entre les valeurs propres de U, dont on trouvera une preuve simple dans [AB] :

$$\mu_{m+1} - \mu_m \leq \frac{4}{mn}(\mu_1 + \ldots + \mu_m).$$

En particulier, cela permet de déduire une majoration de toutes les valeurs du spectre en fonction de la première valeur propre μ_1.

Cette inégalité contraste avec le cas d'une variété compacte, connexe M de dimension $n \geq 3$, où on sait que l'on peut prescrire toute partie finie du spectre du laplacien agissant sur les fonctions [CV]. Cela signifit que si on se donne une suite finie

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$$

il existe une métrique riemannienne g sur M telle que les $k+1$ premières valeurs propres du spectre du laplacien agissant sur les fonctions de (M, g) soient exactement les valeurs λ_j , $j = 0, \ldots, k$ que l'on s'est données. En dimension 2, on montre également dans [CV] que l'on peut prescrire toute partie finie du spectre dès lors qu'il n'y a pas de multiplicité. Enfin, lorsque l'on considère la laplacien agissant sur les formes différentielles de degré $1 \leq p \leq n-1$, on sait que l'on peut prescrire le spectre sans multiplicité, que l'on considère une variété compacte ou un domaine euclidien pour les conditions au bord usuelles (voir [Gu] pour un énoncé détaillé), la question de la multiplicité restant ouverte.

Dans cet article, on examine le cas du laplacien brut sur un fibré vectoriel riemannien $R^l \to E \to (M,g)$ dont la base est fixée et dont on laisse varier la connexion, et on exibe une relation du type Payne-Polya-Weinberger entre les valeurs propres.

2 Notations et résultats

Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe, dont l'élément de volume est noté v_g. On considère un fibré vectoriel riemannien E sur M, c'est à dire un fibré vectoriel E muni d'un produit scalaire $<,>_x$ dans chaque fibre qui dépend de x de manière C^∞. On suppose de plus que E est muni d'une connexion

$$D : C^\infty(E) \to C^\infty(T^*M \otimes E)$$

compatible avec le produit scalaire, c'est à dire que pour toutes sections $s,t \in C^\infty(E)$ et X champ de vecteurs sur M on a $X < s,t >=< D_X s,t > + < s, D_X t >$.

On définit la L^2-norme d'une section s de E par

$$\|s\|_2^2 = \int_M < s,s >_x v_g = \int_M |s|_x^2 v_g$$

et on note $L^2(E)$ l'espace de Hilbert associé, le produit scalaire de deux sections s et t étant donné par

$$<< s,t >>= \int_M < s,t >_x v_g.$$

Les connexions et produits scalaires sur E et M s'étendent de manière usuelle aux produits tensoriels, et sont notés de la même façon.

Enfin, on introduit le laplacien brut (ou de Bochner) sur les sections C^∞ de E par $\bar{\Delta} = D^*D$, où D^* est l'adjoint formel de D relativement au produit scalaire L^2. Le laplacien brut est un opérateur différentiel linéaire et elliptique. Son spectre est discret, positif, et est noté

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots \to \infty.$$

On a la caractérisation variationelle suivante pour le spectre, en notant $R(s) = \frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2}$ le quotient de Rayleigh d'une section C^∞ s de E:

$$\lambda_i = \min_V \max_{s \in V \setminus 0} R(s)$$

où V est un sous-espace vectoriel de dimension i de $C^\infty(E)$.

Si (M,g) est une variété riemannienne, on notera $K(M,g)$ sa courbure sectionnelle, $diam(M,g)$ son diamètre et $inj(M,g)$ son rayon d'injectivité.

Dans cet article, on démontre le

Théorème 2.1 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe, de dimension n vérifiant*

$$|K(M,g)| \leq a;\ diam(M,g) \leq d;\ inj(M,g) \geq r_0$$

où a,d et r_0 sont des constantes positives. Soit E un fibré vectoriel riemannien sur (M,g). Alors il existe des constantes positives $A = A(n,a,d,r_0) > 1$ et $B = B(n,a,d,r_0)$ telles que, pour toute connexion D, les valeurs propres du spectre du laplacien brut $\bar{\Delta}$ associé à D vérifient la relation

$$\lambda_{2^k} \leq A^k \lambda_1 + \frac{A^k - 1}{A - 1} B$$

pour tout entier positif k.

Ce théorème sera une conséquence immédiate du

Théorème 2.2 *Soit (M,g) une variété riemannienne compacte, connexe, de dimension n vérifiant*

$$|K(M,g)| \leq a;\ diam(M,g) \leq d;\ inj(M,g) \geq r_0$$

où a,d et r_0 sont des constantes positives. Soit E un fibré vectoriel riemannien sur (M,g). Alors il existe des constantes positives $A = A(n,a,d,r_0) > 1$ et $B = B(n,a,d,r_0)$ telles que, pour toute connexion D et toute section lisse $s \neq 0$ de E de quotient de Rayleigh ν, il existe deux sections lisses s_1 et s_2 de E de supports disjoints contenus dans le support de s telles que

$$R(s_i) \leq A\nu + B,\ i = 1,2.$$

[. Preuve du théorème 2.1 à l'aide du théorème 2.2] On part d'une section s de E propre pour la valeur propre λ_1. A l'aide du théorème 2.2, on construit deux sections lisses s_1 et s_2 de supports disjoints, de quotients de Rayleigh $R(s_i) \leq A\lambda_1 + B$, $i = 1,2$.

On répète alors l'opération en appliquant le théorème 2.2 aux sections s_1 et s_2, avec $\nu = A\lambda_1 + B$ et on obtient quatre sections de supports disjoints, dont le quotient de Rayleigh est majoré par $A^2\lambda_1 + AB + B$.

On itère à nouveau le procédé en appliquant le théorème 2.2 aux sections de l'étape précédente. A l'étape k, on obtient ainsi 2^k sections dont le quotient de Rayleigh est majoré par

$$A^k\lambda_1 + A^{k-1}B + \ldots + AB + B = A^k\lambda_1 + \frac{A^{k-1} - 1}{A - 1} B$$

et on conclut par le min-max. $\square$

Remarque 2.3 *Un résultat de Gallot et Meyer ([GM] p.72) permet de minorer le spectre de $\bar{\Delta}$ par le spectre du laplacien de la base. Si $\lambda_k(M,g)$ désigne la k ème valeur propre de la base, $k \geq 1$, on a*

$$\lambda_{k(l+1)}(\bar{\Delta}) \geq \frac{1}{8(l+1)}\lambda_k(M,g).$$

On sait par ailleurs ([BCC]) que $\lambda_1(\bar{\Delta})$ peut être arbitrairement grande.

Remarque 2.4 *La présence du terme $\frac{A^k-1}{A-1}B > 0$ est nécessaire, car pour un fibré plat, on peut avoir $\lambda_1(\bar{\Delta}) = 0$.*

3 Preuve du théorème 2.2

La principale difficulté, pour obtenir un bon contrôle en fonction du quotient de Rayleigh ν de s, est que l'essentiel de la norme de la section s peut se localiser dans une partie de M ayant une mesure très petite. Cela sera contrôlé à l'aide des lemmes 3.1 et 3.3.

On commence par fixer deux fonctions de coupure $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qui sont de classe C^∞, positives, décroissantes.

La fonction χ_1 prend la valeur 1 sur l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ et la valeur 0 sur $[\frac{5}{8}, \infty[$.

La fonction χ_2 prend la valeur 1 sur l'intervalle $[0, 3/4]$ et la valeur 0 sur $[7/8, \infty[$.

On note $\chi_{i,r}$ la composée de χ_i avec l'homothétie de rapport r, $i = 1, 2$. Il existe alors une constante positive C_1 que l'on fixe telle que $\|\chi'_{i,r}\|_\infty \leq \frac{C_1}{r}$, $i = 1, 2$.

On rappelle également l'inégalité de Kato (c.f. [Be] p.380): si s est une section lisse de E, la différentielle $d|s|$ de sa norme est dans $L^2(T^*M)$ et vérifie, au sens des distributions,

$$|d|s|| \leq |Ds|.$$

On considère une section lisse s de E de quotient de Rayleigh $R(s) = \nu$ que l'on normalise de sorte que $\|s\|_2 = 1$. Le but du lemme 3.1 est de construire, à partir de cette section s, deux sections s_1 et s_2 de supports disjoints contenus dans le support de s, et dont le quotient de Rayleigh est contrôlé en fonction de ν. En considérant les normes ponctuelles f_1 et f_2 de s_1 et s_2, on obtient deux fonctions à supports disjoints sur la base dont on contrôle également le quotient de Rayleigh.

On considère la boule $B(x, r/2) \subset M$ centrée en x et de rayon $r/2$ ainsi que le complémentaire $B(x,r)^c$ de la boule de centre x et de rayon r. Pour des raisons techniques, on choisit $r < \min(r_0, \pi/\sqrt{a})$. On introduit également la fonction distance au point x sur (M,g), notée ρ, et qui sera de classe C^∞ sur $B(x,r)$ en dehors du point x (voir [Sa], prop.4.8, chap.3). On rappelle également que le gradient de ρ est de norme 1.

Soit s_1 la section définie par $s_1 = (\chi_{1,r} \circ \rho)s$, s_2 la section définie par $s_2 = (1 - \chi_{2,r} \circ \rho)s$.

On note $f_1 = |s_1|$ et $f_2 = |s_2|$ les normes ponctuelles respectives. Ce sont des fonctions positives de $H^1(M)$, à support dans $B(x,r)$ et $B(x,r/2)^c$ respectivement. Remarquons que par construction, les supports de f_1 et f_2 (et donc de s_1 et s_2) sont disjoints et contenus dans le support de s. En effet, $\chi_{1,r} \circ \rho(y) = 0$ si $\rho(y) \geq 5/8$ alors que $1 - \chi_{2,r} \circ \rho(y) = 0$ si $\rho(y) \leq 3/4$.

Enfin, notons $\delta_1 > 0$ la norme de la restriction de s à $B(x,r/2)$, $\delta_2 > 0$ la norme de la restriction de s à $B(x,r)^c$, $\delta = min(\sqrt{1-\delta_1^2}, \sqrt{1-\delta_2^2})$.

Lemme 3.1 *Le quotient de Rayleigh de s_1 et s_2 vérifie*

$$R(s_i) \leq \frac{2(C_1/r)^2\delta^2 + 2\nu}{\delta_i^2},\ i = 1, 2.$$

Le quotient de Rayleigh de f_1 et f_2 vérifie

$$R(f_i) \leq \frac{2(C_1/r)^2\delta^2 + 2\nu}{\delta_i^2},\ i = 1, 2.$$

O. n désigne par $C(x, r/2, r)$ la couronne $B(x,r) - B(x,r/2)$. On a

$$|Ds_1| = |D((\chi_{1,r} \circ \rho)s)| = |((\chi'_{1,r} \circ \rho)d\rho)s + (\chi_{1,r} \circ \rho)Ds| \leq$$

$$(|\chi'_{1,r} \circ \rho||s| + (\chi_{1,r} \circ \rho)|Ds|),$$

et ainsi

$$\|Ds_1\|^2 = \int_{B(x,r)} |Ds_1|^2 v_g \leq \int_{B(x,r)} 2(({\chi'_{1,r}}^2 \circ \rho)|s|^2 + (\chi_{1,r}^2 \circ \rho)|Ds|^2)v_g \leq$$

$$2\int_{C(x,r/2,r)} (\frac{C_1}{r})^2|s|^2 v_g + 2\int_{B(x,r)} |Ds|^2 v_g \leq (C_1/r)^2\delta^2 2 + 2\nu$$

d'où la conclusion en divisant $\|Ds_1\|^2$ par $\|s_1\|^2 \geq \delta_1^2$.

Un raisonnement semblable donne le résultat pour s_2.

Pour traiter le cas de f_1 et de f_2, on se ramène aux cas de s_1 et s_2 par l'inégalité de Kato:

On a

$$|df_1| = |d((\chi_{1,r} \circ \rho)|s|)| = |((\chi'_{1,r} \circ \rho)d\rho|s| + (\chi_{1,r} \circ \rho)d|s|)| \leq$$

$$(|\chi'_{1,r} \circ \rho||s| + \chi_{1,r} \circ \rho|d(|s|)|)$$

d'où

$$\|df_1\|^2 = \int_{B(x,r)} |df_1|^2 v_g \leq \int_{B(x,r)} 2((\chi'^{\,2}_{1,r} \circ \rho)|s|^2 + (\chi^2_{1,r} \circ \rho)|d|s||^2) v_g \leq$$

$$2\int_{C(x,r/2,r)} (\frac{C_1}{r})^2 |s|^2 v_g + 2\int_{B(x,r)} |Ds|^2 v_g \leq (C_1/r)^2 \delta^2 2 + 2\nu$$

d'où la conclusion en divisant $\|df_1\|^2$ par $\|f_1\|^2 \geq \delta_1^2$.

Un raisonnement semblable donne le résultat pour f_2. □

Avant de poursuivre, rappelons deux résultats standards qui interviendront dans la preuve du lemme 3.3:

Remarque 3.2

(i) Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n vérifiant

$$|K(M,g)| \leq a; \; inj(M,g) \geq r_0$$

où a et r_0 sont des constantes positives. Soit $r \leq min(\frac{r_0}{3}, \frac{\pi}{5\sqrt{a}})$. Alors, si $x \in M$, la boule $B(x,r)$ centrée en x et de rayon r est plongée dans M. Notons $B_a(r)$ la boule de rayon r dans la sphère de dimension n et de courbure sectionnelle a. Alors, un théorème de Cheng (voir [Ch], théorème 5 p.70) permet d'affirmer que

$$\mu(B(x,r)) \geq \mu(B_a(r))$$

où μ désigne la première valeur propre du problème de Dirichlet. De plus, le choix de r fait que $B_a(r)$ est contenue dans une calotte sphèrique d'angle $\frac{\pi}{4}$, et est donc quasi-isométrique à la boule euclidienne $B_0(r)$ de rayon r, avec un contrôle uniforme en r du rapport de quasi-isométrie (la quasi-isométrie étant par exemple donnée par la projection stéréographique).

Un résultat dû à Dodziuk ([Do], prop.3.3, p.441) permet d'encadrer le spectre de la boule $B_a(r)$ à l'aide de celui de la boule euclidienne $B_0(r)$. En résumé, il existe une constante positive $C_2(n)$ telle que

$$\mu(B(x,r)) \geq \frac{C_2(n)}{r^2}$$

dès lors que $r \leq min(\frac{r_0}{3}, \frac{\pi}{5\sqrt{a}})$.

(ii) Posons $r_1 = min(\frac{r_0}{10}, \frac{\pi}{10\sqrt{a}})$ *et pour* $k > 1$, $r_k = \frac{r_{k-1}}{10} = \frac{r_1}{10^{k-1}}$.

Dans la suite, on va considérer des recouvrements de M *par des boules* $B(x_i, r_1/2)$, $i = 1, \ldots, N$, *telles que les boules* $B(x_i, r_1/4)$ *soient deux à deux disjointes. Des estimations standards sur le volume des variétés (voir [Sa], théorème 3.3, chap.4) montrent alors que* $N \leq C(n, a, d, r_0)$.

De même, on va considérer des recouvrements de boules $B(x_{j-1}, r_{j-1})$ *par des boules* $B(y_i, r_j/2)$, $i = 1, \ldots, N$, *telles que les boules* $B(y_i, r_j/4)$ *soient disjointes deux à deux. A nouveau, on déduit de [Sa], théorème 3.3, chap.4, que* $N \leq C(n, a)$.

Lemme 3.3 *Soit* s *une section lisse de* E *telle que* $\|s\| = 1$ *et* $\|Ds\|^2 = \nu$.

Soit $\gamma = \gamma(n, a, d, r_0) = min(\frac{1}{C(n,a,d,r_0)}, \frac{1}{C(n,a)}, \frac{1}{4}\frac{\sqrt{C_2}}{C_1}, \frac{1}{4})$.

Alors, il existe $x \in M$ *et* $r \geq min(\frac{r_0}{10}, \frac{\pi}{10\sqrt{a}}, \sqrt{\frac{C_2}{64\nu}})$ *tels que*

$$\|s_{|B(x,r/2)}\| \geq \gamma/2 \text{ et } \|s_{|B(x,r)^c}\| \geq \gamma/2$$

[. Preuve du théorème 2.2 à l'aide des lemmes 3.1 et 3.3] On part d'une section s de norme 1 et de quotient de Rayleigh ν. On va appliquer le lemme 3.1 aux sections s_1 et s_2 construites à partir de s avec le rayon r donné par le lemme 3.3. On a donc $\delta_1 = \delta_2 = \gamma/2$. Le lemme 3.1 nous dit alors que

$$R(s_i) \leq \frac{2(C_1/r) + 2\nu}{(\gamma/2)^2} = \frac{2(C_1/r)^2}{(\gamma/2)^2} + \frac{2\nu}{(\gamma/2)^2}\ ,\ i = 1, 2.$$

On a alors l'alternative suivante:

Soit le rayon r obtenu au lemme 3.3 vérifie $r \geq min(\frac{r_0}{10}, \frac{\pi}{10\sqrt{a}})$ et ne dépend donc que de la géométrie de (M, g) auquel cas on pose $A = \frac{8}{\gamma^2}$ et $B = \frac{8C_1^2}{r^2\gamma^2}$ pour conclure.

Soit r vérifie $r \geq \sqrt{\frac{C_2}{64\nu}}$ auquel cas on pose $A = \frac{8}{\gamma^2}(\frac{64C_1^2}{C_2} + 1)$ et $B = 0$ pour conclure. □

Preuve du lemme 3.3. Elle consiste en un processus de plusieurs étapes, dont on montrera qu'il s'arrête de manière à pouvoir démontrer le lemme.

Première étape: On recouvre M avec des boules de rayon $r_1/2$ avec $r_1 = \min(\frac{r_0}{10}, \frac{\pi}{10\sqrt{a}})$ telles que les boules de même centre et de rayon $r_1/4$ soient deux à deux disjointes. Comme la section s associée à ν est supposée de norme 1, et d'après la remarque 3.2(ii), il existe $x_1 \in M$ tel que $\|s_{|B(x_1,r_1/2)}\| \geq \gamma$. Si de plus $\|s_{|B(x_1,r_1)^c}\| \geq \gamma$ on arrête le processus.

Sinon, comme $\|s\| = 1$, cela signifit que $\|s_{|B(x_1,r_1)}\| \geq \sqrt{1 - \gamma^2}$, et on passe à une deuxième étape.

Deuxième étape : on va itérer le procédé de la première étape, cette fois pour recouvrir la boule $B(x_1, r_1)$ au moyen de boules de rayon $r_2 = r_1/10$, telles que les boules de rayon $r_2/4$ soient deux à deux disjointes. Comme avant, il existe $x_2 \in B(x_1, r_1)$ tel que $\|s_{|B(x_2,r_2/2)}\| \geq \gamma \|s_{|B(x_1,r_1)}\| \geq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$. Si de plus $\|s_{|B(x_2,r_2)^c}\| \geq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$, on arrête le processus.

Sinon, comme $\|s\| = 1$, cela signifie que $\|s_{|B(x_2,r_2)}\| \geq \sqrt{1-\gamma^2+\gamma^4} \geq \sqrt{1-\gamma^2}$, et on poursuit le processus.

On pose $r_l = \frac{r_1}{10^{l-1}}$

Etape k: On suppose que $\|s_{|B(x_{k-1},r_{k-1})}\| \geq \sqrt{1-\gamma^2}$ et on recouvre cette boule au moyen de boules de rayon $r_k/2$ telles que les boules de rayon $r_k/4$ soient deux à deux disjointes.

Comme à l'étape 2, il existe $x_k \in B(x_{k-1}, r_{k-1})$ tel que
$\|s_{|B(x_k,r_k/2)}\| \geq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$. Si de plus $\|s_{|B(x_k,r_k)^c}\| \geq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$ on arrête le processus.

Sinon, comme $\|s\| = 1$, cela signifit que $\|s_{|B(x_k,r_k)}\| \geq \sqrt{1-\gamma^2+\gamma^4} \geq \sqrt{1-\gamma^2}$ et on poursuit le processus.

Pour conclure, on va montrer que le processus s'arrête, avec $r_k \geq \sqrt{\frac{C_2}{64\nu}}$.

En effet, si le processus ne s'arrête pas à l'étape k, cela signifit que l'on peut trouver une boule centrée en un point x_k telle que

$$\|s_{|B(x_k,r_k/2)}\| \geq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$$

et

$$\|s_{|B(x_k,r_k})^c\| \leq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$$

L'idée est maintenant la suivante: la section s associée à ν est pour l'essentiel concentrée dans $B(x_k, r_k)$. En la tronquant entre $B(x_k, r_k)$ et $B(x_k, 2r_k)$, on construit, en prenant la norme, une fonction test pour le problème de Dirichlet sur $B(x_k, 2r_k)$. On va montrer, à l'aide de la remarque 3.2(i), que cela implique que r_k est minoré par $\sqrt{\frac{C_2}{64\nu}}$.

D'après le lemme 3.1, en notant $f = (\chi_{1,2r_k} \circ \rho)|s|$, où ρ désigne la fonction distance à x_k, on a

$$R(f) \leq \frac{2(C_1/2r_k)^2(\gamma\sqrt{1-\gamma^2})^2 + 2\nu}{(1-(\gamma\sqrt{1-\gamma^2}))^2} \leq \frac{2(C_1/2r_k)^2\gamma^2 + 2\nu}{(1-\gamma)^2}$$

Comme f est à support compact dans la boule de rayon $2r_k$, on en déduit

$$\frac{C_2(n)}{(2r_k)^2} \leq \frac{2(C_1/2r_k)^2\gamma^2 + 2\nu}{(1-\gamma)^2}$$

En notant que $\gamma < 1/2$, on obtient

$$C_2(n) \leq 8C_1^2\gamma^2 + 32\nu r_k^2$$

Comme $\gamma \leq \frac{1}{4}\frac{\sqrt{C_2}}{C_1}$, on a

$$r_k^2 \geq \frac{C_2}{64\nu}$$

On peut alors conclure comme suit la preuve du lemme 3.3: si on s'arrête à la première étape, on obtient que $\|s_{|B(x_1,r_1/2)}\| \geq \gamma$ et $\|s_{|B(x_1,r_1)^c}\| \geq \gamma$ sous la condition $r = min(\frac{r_0}{10}, \frac{\pi}{10\sqrt{a}})$ ce qui permet de conclure.

Si le processus s'arrête à une étape ultérieure $l > 1$, on obtient que $\|s_{|B(x_l,r_l/2)}\| \geq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$ et $\|s_{|B(x_l,r_l)^c}\| \geq \gamma\sqrt{1-\gamma^2}$ sous la condition $r \geq \sqrt{\frac{C_2}{64\nu}}$, ce qui permet également de conclure en notant que, comme $\gamma < 1/4$, on a $\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \geq \gamma/2$. □

References

[AB] M.S. Ashbaugh, R. Benguria, *Isoperimetric inequalities for eigenvalue ratios* in Partial differential equations of elliptic type (Cortona 1990), Symp. Math. 35, Cambridge Univ. Press, 1-36.

[BCC] G. Besson, B. Colbois, G. Courtois, *Sur la multiplicité de la première valeur propre de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique sur la sphère S^2,* Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1) (1998), 331-345.

[Be] P. Bérard, *From vanishing theorems to estimating theorem: the Bochner method revisited,* Bull. Amer. Math. Soc. 19 (1988), 371-406.

[CV] Y. Colin de Verdière, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée,* Ann. Ec. Norm. Sup. 4^e série, t. 20 (1987), 599-615.

[Ch] I. Chavel, *Eigenvalues in Riemannian Geometry,* Ac. Press (1984).

[Do] J. Dodziuk, *Eigenvalues of the Laplacian on forms,* Proc. Amer. Math. Soc. 85, 3 (1982), 437-443.

[GM] S. Gallot, D. Meyer, *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectres. Applications,* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. série 4, t. 21 (1988), 561-591.

[Gu] P. Guerini, *Spectre du Laplacien agissant sur les formes différentielles d'un domaine euclidien,* Thèse de Doctorat, Université de Savoie (2001).

[Sa] T. Sakai, *Riemannian Geometry,* American Math. Soc., Providence, Rhode Island (1996).