

# L'AIRE DES TRIANGLES IDÉAUX EN GÉOMÉTRIE DE HILBERT

B. COLBOIS, C. VERNICOS\* ET P. VEROVIC

1<sup>er</sup> décembre 2003

## Résumé

L'objet de cet article est l'étude de l'aire des triangles idéaux pour la géométrie de Hilbert d'un domaine convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Les résultats que nous obtenons donnent d'une part une caractérisation de la géométrie hyperbolique dans l'ensemble des géométries de Hilbert, et d'autre part une minoration optimale, indépendante du convexe, de l'aire de Hilbert des triangles idéaux qui caractérise les domaines triangulaires du plan. En outre, sous certaines conditions géométriques, nous établissons une majoration de cette aire dont nous montrons qu'elle doit dépendre du convexe.

## Introduction

Le concept de simplexe idéal joue un rôle important dans l'étude des variétés riemanniennes à courbure négative. Par exemple, J. Barge et É. Ghys obtiennent la caractérisation suivante de la géométrie hyperbolique plane comme conséquence de leur résultat sur la cohomologie bornée (voir [BG88], p. 511) :

**Théorème 1.** *Soit  $g$  une métrique riemannienne de courbure négative ou nulle sur une surface  $S$  compacte, connexe et orientable.*

*Si les triangles idéaux du revêtement universel de  $S$  ont tous la même aire, alors  $(S, g)$  est de courbure constante.*

Signalons que pour une surface riemannienne complète et simplement connexe à courbure négative ou nulle dont tous les triangles idéaux ont une aire finie, on ne sait toujours pas s'il existe un analogue de ce résultat.

Dans la première partie du présent travail, nous obtenons une caractérisation de la géométrie hyperbolique parmi les géométries de Hilbert en terme d'aire des triangles idéaux (voir le théorème 2 ci-dessous). Cette caractérisation peut être considérée comme une généralisation du théorème

---

\*Partiellement financé par le projet européen ACR OFES numéro 00.0349 et la bourse FNRS 20-65060.01

précédent dans un cadre quelque peu différent. Puis nous étudions les problèmes de minoration et majoration de l'aire des triangles idéaux.

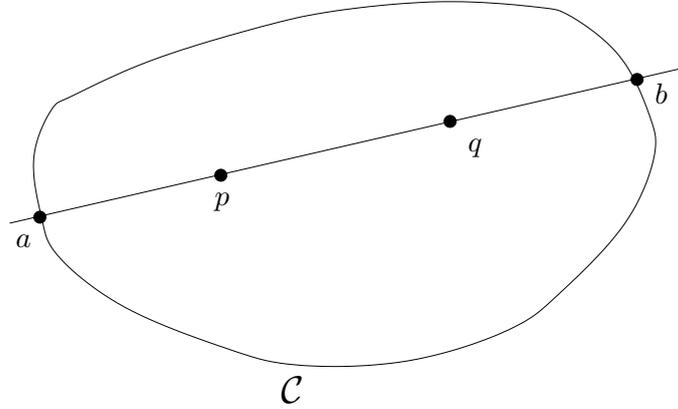


FIG. 1 – Distance de Hilbert

Avant d'énoncer précisément nos résultats, rappelons qu'une géométrie de Hilbert  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  est la donnée d'un ouvert non vide, convexe et borné  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^n$  – que nous appellerons *domaine convexe* – muni de la distance de Hilbert  $d_{\mathcal{C}}$  définie de la manière suivante : pour tous points distincts  $p$  et  $q$  dans  $\mathcal{C}$ , la droite passant par  $p$  et  $q$  rencontre le bord  $\partial\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$  en deux points  $a$  et  $b$  tels que  $p$  soit entre  $a$  et  $q$  et  $q$  soit entre  $p$  et  $b$  (figure 1). On définit alors

$$d_{\mathcal{C}}(p, q) = \frac{1}{2} \ln[a, p, q, b],$$

où  $[a, p, q, b]$  est le birapport de  $(a, p, q, b)$ , c'est-à-dire

$$[a, p, q, b] = \frac{\|q - a\|}{\|p - a\|} \times \frac{\|p - b\|}{\|q - b\|} > 1,$$

en désignant par  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^n$ . On pose également  $d_{\mathcal{C}}(p, p) = 0$  (voir [Hil71], appendice I).

Remarquons tout de suite que si  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont deux domaines convexes de  $\mathbb{R}^n$  tels que leurs images respectives  $\widehat{\mathcal{C}}$  et  $\widehat{\mathcal{C}'}$  dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  vérifient  $\widehat{\mathcal{C}'} = A(\widehat{\mathcal{C}})$ , où  $A$  est une homographie de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  – donc conserve le birapport de quatre points de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  –, alors les géométries de Hilbert  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  et  $(\mathcal{C}', d_{\mathcal{C}'})$  sont isométriques.

Dans toute géométrie de Hilbert  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ , le segment de droite reliant deux points quelconques du convexe  $\mathcal{C}$  est un segment géodésique pour  $d_{\mathcal{C}}$  (au sens de [BH99], p. 4) et  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  est un espace métrique géodésique dont la topologie est celle induite par la topologie canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Ceci dit, en général, le segment reliant deux points n'est pas l'unique géodésique entre ceux-ci, cette unicité étant néanmoins satisfaite lorsque le bord  $\partial\mathcal{C}$  de  $\mathcal{C}$

est une hypersurface de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}^n$  dont la courbure de Gauss est partout non nulle – on dira alors que  $\mathcal{C}$  est un *convexe strict*. Notons enfin que cette condition d’être un convexe strict n’est pas nécessaire pour avoir unicité du segment géodésique – voir une discussion détaillée de ce point dans [SM00], §1.2.2.

Par ailleurs, on peut mettre sur tout domaine convexe  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$  une métrique de Finsler  $C^0$ , notée  $F_{\mathcal{C}}$ , en procédant comme suit : si  $p \in \mathcal{C}$  et  $v \in T_p\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$  avec  $v \neq 0$ , la droite passant par  $p$  et dirigée par  $v$  coupe  $\partial\mathcal{C}$  en deux points  $p_{\mathcal{C}}^+$  et  $p_{\mathcal{C}}^-$  ; on pose alors

$$F_{\mathcal{C}}(p, v) = \frac{1}{2}\|v\| \left( \frac{1}{\|p - p_{\mathcal{C}}^-\|} + \frac{1}{\|p - p_{\mathcal{C}}^+\|} \right) \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{C}}(p, 0) = 0.$$

Cette métrique de Finsler est liée à la distance de Hilbert  $d_{\mathcal{C}}$  par le fait que

$$F_{\mathcal{C}}(p, v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d_{\mathcal{C}}(p, p + tv)$$

et que

$$d_{\mathcal{C}}(p, q) = \inf \left\{ \int_0^1 F_{\mathcal{C}}(\sigma(t), \sigma'(t)) dt \mid \sigma \in \Omega^1(\mathcal{C}, p, q) \right\},$$

où

$$\Omega^1(\mathcal{C}, p, q) = \{ \sigma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{C} \mid \sigma \text{ de classe } C^1 \text{ avec } \sigma(0) = p \text{ et } \sigma(1) = q \}.$$

Grâce à cette métrique de Finsler, on construit une mesure borélienne  $\mu_{\mathcal{C}}$  sur  $\mathcal{C}$  (qui correspond en fait à la mesure de Hausdorff de l’espace métrique  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  – voir [BBI01], exemple 5.5.13 ) que nous allons expliciter.

Pour chaque  $p \in \mathcal{C}$ , soient  $B_{\mathcal{C}}(p) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid F_{\mathcal{C}}(p, v) < 1\}$  la boule unité ouverte de  $T_p\mathcal{C} = \mathbb{R}^n$  pour la norme  $F_{\mathcal{C}}(p, \cdot)$  et  $\omega_n$  le volume euclidien de la boule unité ouverte de l’espace euclidien canonique  $\mathbb{R}^n$ . En considérant la fonction (densité)  $h : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $h(p) = \omega_n / \text{vol}(B_{\mathcal{C}}(p))$ , où  $\text{vol}$  est la mesure de Lebesgue canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit  $\mu_{\mathcal{C}}$  – que nous appellerons *mesure de Hilbert* sur  $\mathcal{C}$  – par

$$\mu_{\mathcal{C}}(A) = \int_A h(p) d\text{vol}(p)$$

pour tout borélien  $A$  de  $\mathcal{C}$ .

Lorsque  $\mathcal{C}$  est un ellipsoïde,  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  correspond au modèle projectif (ou modèle de Klein) de la géométrie hyperbolique, et on peut penser aux géométries de Hilbert  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  comme à une généralisation naturelle de l’espace hyperbolique. Une question commune à de nombreux travaux récents (voir [SM00], [SM02], [Ben01], [CV], [KN02] et leurs références) est de déterminer les propriétés de l’espace hyperbolique dont héritent les géométries de Hilbert et de trouver des caractérisations de l’espace hyperbolique parmi celles-ci.

Le premier résultat de cet article est l'obtention d'une telle caractérisation grâce à l'aire de Hilbert des triangles idéaux. À cause de la non unicité des géodésiques pour  $d_C$  entre deux points d'un domaine convexe  $C \subset \mathbb{R}^n$ , un triangle de  $(C, d_C)$  ne peut être défini à l'aide des segments géodésiques de  $d_C$  qui joignent ses sommets. C'est pourquoi nous convenons de définir tout d'abord un triangle  $T = abc$  de  $\mathbb{R}^n$  comme l'intérieur de l'enveloppe convexe affine ouverte de trois points non alignés  $a, b, c \in \mathbb{R}^n$ . Un tel triangle sera alors un triangle de  $(C, d_C)$  si ses sommets sont dans  $C$  et un triangle idéal de  $(C, d_C)$  si ses sommets sont dans  $\partial C$  et s'il est inclus dans  $C$ .

Dans le cas d'un convexe strict, cela équivaut à la définition usuelle d'un triangle idéal d'un espace métrique uniquement géodésique, en particulier de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  dans lequel il est connu que tous les triangles idéaux sont isométriques avec une aire (hyperbolique) commune égale à  $\pi$ . En fait, nous allons montrer que cette propriété de l'aire caractérise  $\mathbb{H}^n$  parmi les géométries de Hilbert de  $\mathbb{R}^n$  :

**Théorème 2.** *Étant donné une géométrie de Hilbert  $(C, d_C)$  avec  $C \in \mathbb{R}^n$ , on a :*

- (i) *Tous les triangles idéaux de  $(C, d_C)$  sont d'aire constante si, et seulement si,  $C$  est un ellipsoïde – auquel cas cette aire constante vaut  $\pi$ .*
- (ii) *Si  $C$  n'est pas un ellipsoïde, il existe des triangles idéaux de  $(C, d_C)$  d'aire strictement plus grande que  $\pi$  et d'autres d'aire strictement plus petite que  $\pi$ .*

**Remarque.** Ici, et dans toute la suite de ce travail, l'aire d'un triangle (idéal ou pas) de  $(C, d_C)$  est son aire pour la mesure de Hilbert de  $(C \cap P, d_{C \cap P})$ , où  $P$  est l'unique plan vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  contenant le triangle.

La démonstration du théorème 2, donnée dans la première partie de cet article, est simple et purement géométrique.

Dans la seconde partie, nous obtenons une minoration uniforme de l'aire des triangles idéaux avec caractérisation du cas d'égalité :

**Théorème 3.** *Étant donné une géométrie de Hilbert  $(C, d_C)$  avec  $C \subset \mathbb{R}^n$ , on a :*

- (i) *L'aire de tout triangle idéal de  $(C, d_C)$  est au moins égale à  $\pi^3/24$ .*
- (ii) *Si  $n = 2$  et s'il existe un triangle idéal de  $(C, d_C)$  d'aire égal à  $\pi^3/24$ , alors  $C$  est un domaine triangulaire.*

Remarquons que le cas d'égalité caractérise bien la géométrie de  $C$ , puisque tous les domaines triangulaires du plan munis de leurs géométries de Hilbert sont isométriques.

Enfin, dans la troisième partie, nous montrons que la recherche d'une majoration de l'aire des triangles idéaux donne lieu à une situation différente et plus contrastée. En effet, le corollaire 6.2 ci-dessous fournit des

géométries de Hilbert qui possèdent des triangles idéaux d'aire infinie, de sorte qu'il est illusoire de chercher un majorant de l'aire des triangles idéaux commun à toutes les géométries de Hilbert à l'instar du théorème 3. L'exemple 11 montre également que cette impossibilité persiste même en se restreignant à l'ensemble des convexes stricts de  $\mathbb{R}^n$ .

Cependant, lorsqu'on considère un convexe strict fixé  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^n$ , nous prouvons qu'il existe néanmoins un majorant (dépendant de  $\mathcal{C}$ ) de l'aire de tous les triangles idéaux de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  :

**Théorème 4.** *Soit  $\mathcal{C}$  un convexe strict de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une constante  $\alpha = \alpha(\mathcal{C}) > 0$  telle que tout triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  a une aire au plus égale à  $\alpha$ .*

## 1 Préliminaires

### 1.1 Quelques propriétés élémentaires

Nous débutons par une liste de faits simples et généraux dont nous ferons abondamment usage.

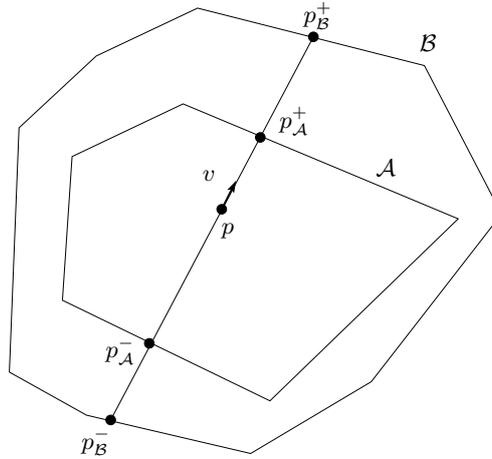


FIG. 2 – Comparaison des distances et mesures de Hilbert de deux domaines convexes emboîtés

**Proposition 5.** *Soient  $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$  et  $(\mathcal{B}, d_{\mathcal{B}})$  des géométries de Hilbert telles que  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ . Alors :*

- (i) *Les métriques de Finsler  $F_{\mathcal{A}}$  et  $F_{\mathcal{B}}$  vérifient  $F_{\mathcal{B}}(p, v) \leq F_{\mathcal{A}}(p, v)$  pour tous  $p \in \mathcal{A}$  et  $v \in \mathbb{R}^n$  non nul, l'égalité ayant lieu si, et seulement si,  $p_{\mathcal{A}}^- = p_{\mathcal{B}}^-$  et  $p_{\mathcal{A}}^+ = p_{\mathcal{B}}^+$  (figure 2).*
- (ii) *Pour tous  $p, q \in \mathcal{A}$ , on a  $d_{\mathcal{B}}(p, q) \leq d_{\mathcal{A}}(p, q)$ .*

(iii) Pour tout  $p \in \mathcal{A}$ , on a  $\text{vol}(B_{\mathcal{A}}(p)) \leq \text{vol}(B_{\mathcal{B}}(p))$ , avec égalité si, et seulement si,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

(iv) Pour tout borélien  $A$  de  $\mathcal{A}$ , on a  $\mu_{\mathcal{B}}(A) \leq \mu_{\mathcal{A}}(A)$ , avec égalité si, et seulement si,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

*Démonstration.*

Il suffit de prouver l'assertion (i) qui implique toutes les autres propriétés. Or, elle découle directement du fait que pour tous  $p \in \mathcal{A}$  et  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \neq 0$ , on a

$$\|p - p_{\mathcal{A}}^+\| \leq \|p - p_{\mathcal{B}}^+\| \quad \text{et} \quad \|p - p_{\mathcal{A}}^-\| \leq \|p - p_{\mathcal{B}}^-\|,$$

l'égalité ayant lieu si, et seulement si,  $p_{\mathcal{A}}^- = p_{\mathcal{B}}^-$  et  $p_{\mathcal{A}}^+ = p_{\mathcal{B}}^+$ .

□

Grâce à cette proposition, on va pouvoir estimer la mesure de Hilbert d'un domaine convexe du plan inclus dans un domaine carré, ce dernier présentant l'avantage d'être suffisamment simple pour permettre des calculs effectifs.

## 1.2 Estimation de l'aire par comparaison avec le domaine carré

L'estimation de l'aire de Hilbert d'un convexe de  $\mathbb{R}^2$  revient à estimer le volume euclidien de la boule unité ouverte pour la métrique de Finsler en chaque point du convexe. Lorsque le convexe est un carré, on obtient :

**Proposition 6.** Soit le domaine carré  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$ . Alors pour tout  $p = (x, y) \in \mathcal{S}$ , on a

$$2(1 - x^2)(1 - y^2) \leq \text{vol}(B_{\mathcal{S}}(p)) \leq 4(1 - x^2)(1 - y^2),$$

où  $B_{\mathcal{S}}(p)$  est la boule unité ouverte de  $T_p\mathcal{S} = \mathbb{R}^2$  pour la norme  $F_{\mathcal{S}}(p, \cdot)$ .

*Démonstration.*

Étant donné  $p \in \mathcal{S}$ , la preuve consiste à vérifier que la boule  $B_{\mathcal{S}}(p)$  est d'une part incluse dans un rectangle  $\mathcal{R}$  dont les côtés sont parallèles à ceux du carré  $\mathcal{S}$ , et d'autre part contient un losange dont les sommets sont les points de contact entre  $\mathcal{R}$  et  $B_{\mathcal{S}}(p)$ .

Puisque  $\mathcal{S}$  est symétrique par rapport aux axes de coordonnées, il suffit de se restreindre à  $p \in [0, 1[ \times ]0, 1[$ .

- Soit  $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  non nul tel que  $|a| \leq \frac{1}{2}(1 - x)$  et  $b \geq 0$ , de sorte que la demi-droite  $p + \mathbb{R}_-v$  (resp.  $p + \mathbb{R}_+v$ ) coupe  $\partial\mathcal{S}$  sur la droite d'équation  $y = -1$  (resp.  $y = 1$ ) en un point  $p_{\mathcal{S}}^-$  (resp.  $p_{\mathcal{S}}^+$ ). Il résulte alors du théorème de Thalès que

$$\frac{b}{1 + y} = \frac{\|v\|}{\|p - p_{\mathcal{S}}^-\|} \quad \text{et} \quad \frac{b}{1 - y} = \frac{\|v\|}{\|p - p_{\mathcal{S}}^+\|},$$

d'où

$$F_S(p, v) = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{1+y} + \frac{b}{1-y} \right) = \frac{b}{1-y^2},$$

ce qui donne l'implication  $v \in B_S(p) \implies b < 1 - y^2$ .

Ainsi,  $B_S(p)$  étant symétrique par rapport à 0, on a

$$B_S(p) \cap \left\{ \left[ -\frac{1}{2}(1-x), \frac{1}{2}(1-x) \right] \times \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R} \times [-(1-y^2), (1-y^2)]$$

et par suite

$$B_S(p) \subset \mathbb{R} \times [-(1-y^2), (1-y^2)]$$

puisque  $B_S(p)$  est convexe.

De la même façon, on montre que

$$B_S(p) \subset [-(1-x^2), (1-x^2)] \times \mathbb{R}.$$

Par conséquent, on obtient

$$B_S(p) \subset [-(1-x^2), (1-x^2)] \times [-(1-y^2), (1-y^2)],$$

ce qui entraîne la deuxième inégalité de la proposition 6.

- On remarque par ailleurs que les points  $(1-x^2, 0)$  et  $(0, 1-y^2)$  sont dans l'adhérence de  $B_S(p)$ , qui est convexe et symétrique par rapport à 0, d'où il résulte que l'enveloppe convexe des points  $(1-x^2, 0)$ ,  $(0, 1-y^2)$ ,  $-(1-x^2, 0)$  et  $-(0, 1-y^2)$  est dans  $\overline{B_S(p)}$ . Comme le volume euclidien de cette enveloppe convexe – qui est un losange – est égal à  $2(1-x^2)(1-y^2)$ , on en déduit la première inégalité de la proposition 6.

□

**Remarque.** À titre indicatif, on peut aisément voir que la boule  $B_S(p)$  est un octogone lorsque  $p$  n'est pas sur les diagonales de  $\mathcal{S}$ , sinon  $B_S(p)$  est un hexagone si  $p \neq 0$  et un carré si  $p = 0$ .

De cette estimation, nous pouvons alors tirer deux conséquences utiles concernant l'aire de Hilbert des triangles idéaux.

**Corollaire 6.1.** Soient  $\mathcal{C}$  un domaine convexe du plan tel que  $\partial\mathcal{C}$  contient un segment ouvert  $]a, b[$  et  $p \in \mathcal{C}$ . Pour chaque  $t \in ]0, 1[$ , notons  $m_a(t) = (1-t)p + ta$  et  $m_b(t) = (1-t)p + tb$ . Alors, pour  $0 < s < t$ , si  $A(t, s)$  désigne l'enveloppe convexe des points  $m_a(t)$ ,  $m_a(s)$ ,  $m_b(t)$  et  $m_b(s)$ , on a  $\lim_{t \rightarrow 1} \mu_{\mathcal{C}}(A(t, s)) = +\infty$  lorsque  $s$  est fixé.

*Démonstration.*

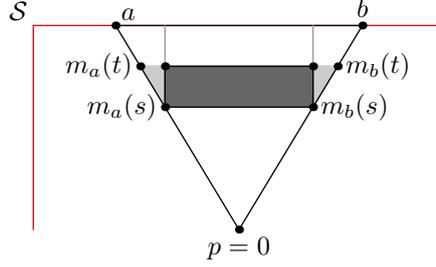


FIG. 3 – Cas d'un convexe dont le bord contient un segment

Après transformation affine, on se ramène au cas où  $p = 0$  et  $\mathcal{C}$  est inclus dans le carré  $\mathcal{S}$  de la proposition 6 avec  $a = (-x_0, 1)$  et  $b = (x_0, 1)$  pour un certain  $x_0 \in ]0, 1[$  (figure 3).

Alors, pour tous  $s, t \in ]0, 1[$  tels que  $s \leq t$ , le rectangle de sommets  $m_a(s) = (-sx_0, s)$ ,  $m_b(s) = (sx_0, s)$ ,  $m_a(t) = (-sx_0, t)$  et  $m_b(t) = (sx_0, t)$  est inclus dans  $A(s, t)$ , d'où il résulte que

$$\mu_{\mathcal{S}}(A(s, t)) \geq 2 \int_0^{sx_0} \left( \int_s^t \frac{\pi}{\text{vol}(B_{\mathcal{S}}(x, y))} dy \right) dx.$$

Mais, d'après la proposition 6, on a  $\text{vol}(B_{\mathcal{S}}(x, y)) \leq 4(1 - x^2)(1 - y^2)$  pour tout  $p = (x, y) \in \mathcal{S}$ , ce qui entraîne que

$$\mu_{\mathcal{S}}(A(s, t)) \geq \frac{\pi}{2} \times \left( \int_0^{sx_0} \frac{dx}{1 - x^2} \right) \times \left( \int_s^t \frac{dy}{1 - y^2} \right),$$

c'est-à-dire,

$$\mu_{\mathcal{S}}(A(s, t)) \geq \frac{\pi}{2} \times \text{Argth}(sx_0) \times [\text{Argth}(t) - \text{Argth}(s)].$$

Par conséquent, en fixant  $s$ , on obtient  $\lim_{t \rightarrow 1} \mu_{\mathcal{S}}(A(s, t)) = +\infty$ .

Comme  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ , on a finalement  $\lim_{t \rightarrow 1} \mu_{\mathcal{C}}(A(s, t)) = +\infty$  d'après la proposition 5 (iv). □

**Corollaire 6.2.** Soient  $\mathcal{C}$  un domaine convexe du plan et  $\omega \in \partial\mathcal{C}$  tels qu'il existe deux droites d'appui distinctes de  $\mathcal{C}$  en  $\omega$ .

Alors, pour tous points distincts  $p, q \in \mathcal{C}$ , on a  $\mu_{\mathcal{C}}(p\omega q) = +\infty$ , où  $p\omega q$  est le triangle de sommets  $p, q$  et  $\omega$ .

*Démonstration.*

On va montrer que tout triangle de  $\mathcal{C}$  dont un sommet est un « coin » de  $\mathcal{C}$  peut être pensé comme une demi-bande affine ouverte du plan.

Par transformation affine, on se ramène au cas où  $\mathcal{C}$  est inclus dans le carré  $\mathcal{S}$  de la proposition 6 avec  $\omega = (1, 1)$  et les droites  $(\omega p)$  et  $(\omega q)$  symétriques l'une de l'autre dans la réflexion par rapport à la droite  $(0\omega)$  et tel que  $p_0, q_0 \in \mathcal{C}$ , où  $p_0$  et  $q_0$  sont respectivement les points d'intersection de la droite d'équation  $x + y = 1$  avec  $(\omega p)$  et  $(\omega q)$ .

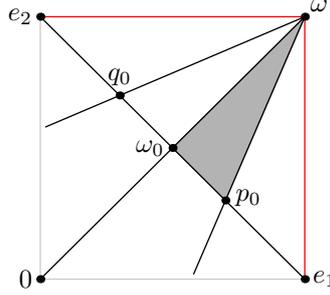


FIG. 4 – Cas d'un convexe possédant un « coin »

En notant  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$  et  $\omega_0 = (1/2, 1/2)$ , il existe donc  $t_0 \in ]0, 1[$  tel que  $p_0 = (1 - t_0)\omega_0 + t_0e_1$  et  $q_0 = (1 - t_0)\omega_0 + t_0e_2$ .

Considérons alors  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 1 \text{ et } y < x < 1\} \subset \mathcal{S}$  et le  $C^\infty$ -difféomorphisme  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  défini par

$$f(x, y) = (X, Y) = (\text{Argth}(t), \text{Argth}(s)),$$

où  $t, s \in ]0, 1[$  sont tels que  $(x, y) = (1 - s)[(1 - t)\omega_0 + te_1] + s\omega$ .

L'image par  $f$  du triangle  $\omega_0\omega p_0 \subset \Delta$  est ainsi la bande  $]0, \text{Argth}(t_0)[ \times \mathbb{R}_+^*$  dont on va montrer que l'aire euclidienne usuelle – qui est infinie – est plus petite que l'aire de  $\omega_0\omega p_0$  pour la mesure de Hilbert  $\mu_S$ .

Un calcul simple donne

$$t = \frac{y - x}{y + x - 2} \quad \text{et} \quad s = x + y - 1,$$

ce qui entraîne que le jacobien de  $f$  en  $(x, y) \in \Delta$  vaut

$$\text{Jac}(f)(x, y) = \frac{1}{2(x + y)(1 - x)(1 - y)}.$$

En vertu de la deuxième inégalité de la proposition 6 et du fait que

$$(1 + x)(1 + y) \leq 3(x + y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \Delta,$$

il en résulte que

$$\begin{aligned} +\infty &= \int_{]0, \text{Argth}(t_0)[ \times \mathbb{R}_+^*} dXdY = \\ &= \int_{\omega_0\omega p_0} \frac{dx dy}{2(x + y)(1 - x)(1 - y)} \leq \frac{6}{\pi} \mu_S(\omega_0\omega p_0) \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $\mu_S(\omega_0\omega p_0) \leq \mu_S(q_0\omega p_0)$  et que  $\mu_S((q\omega p) \setminus (q_0\omega p_0))$  est finie — la partie  $(q\omega p) \setminus (q_0\omega p_0)$  étant compacte —, on en déduit que  $\mu_S(q\omega p) = +\infty$ .

Enfin, comme  $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ , la proposition 5 (iv) achève la preuve du corollaire 6.2.

□

## 2 Caractérisation de la géométrie hyperbolique par l'aire de Hilbert des triangles idéaux

En préliminaire à la démonstration du théorème 2, rappelons le théorème suivant qui est un résultat classique de géométrie convexe que nous énonçons en dimension deux et dont la preuve se trouve dans [Joh48] ou [Lev97], Lecture 3, Theorem 3.1, p. 13–19.

**Théorème 7 (Ellipse de John).** *Soit  $\mathcal{C}$  un domaine convexe du plan.*

*Il contient une unique ellipse ouverte d'aire euclidienne maximale, l'ellipse de John de  $\mathcal{C}$ , dont le bord a au moins trois points de contact avec  $\partial\mathcal{C}$ .*

*Par dualité,  $\mathcal{C}$  est aussi inclus dans une unique ellipse ouverte d'aire euclidienne minimale dont le bord a au moins trois points de contact avec  $\partial\mathcal{C}$ .*

Nous allons maintenant donner la preuve du théorème 2 qui indique comment l'aire de Hilbert des triangles idéaux permet de caractériser l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  parmi toutes les géométries de Hilbert de  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration du théorème 2.*

Commençons par faire la preuve lorsque  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ .

Si  $\mathcal{C}$  est une ellipse, l'espace métrique  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  est isométrique au modèle projectif de Klein du plan hyperbolique (voir par exemple [BP92], p. 2) qui a tous ses triangles idéaux d'aire égale à  $\pi$ .

Si  $\mathcal{C}$  n'est pas une ellipse, soit  $\mathcal{E}_i$  l'unique ellipse ouverte d'aire euclidienne maximale incluse dans le convexe  $\mathcal{C}$  — donnée par le théorème 7 et appelée ellipse de John de  $\mathcal{C}$ . L'ellipse  $\mathcal{E}_i$  ayant au moins trois points de contact avec  $\partial\mathcal{C}$ , on peut considérer le triangle  $T_i$  dont les sommets sont ces trois points (figure 5).

Pour la géométrie de Hilbert associée à l'ellipse de John  $\mathcal{E}_i$ , le triangle  $T_i$  est idéal et d'aire égale à  $\mu_{\mathcal{E}_i}(T_i) = \pi$ . Par conséquent, comme  $\mathcal{E}_i$  est strictement incluse dans  $\mathcal{C}$ , on a  $\mu_{\mathcal{C}}(T_i) < \pi$  en vertu de la proposition 5 (iv).

D'autre part, considérons l'unique ellipse ouverte  $\mathcal{E}_e$  d'aire euclidienne minimale contenant  $\mathcal{C}$  (duale de  $\mathcal{E}_i$ ). D'après le théorème 7, son bord possède également au moins trois points en commun avec celui de  $\mathcal{C}$ , ce qui définit un triangle  $T_e$ .

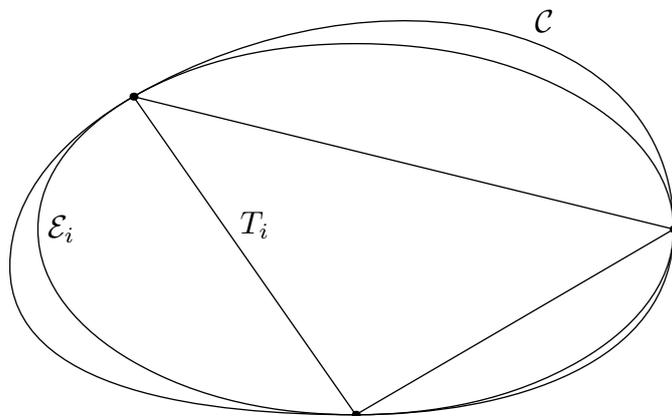


FIG. 5 — Ellipse de John

- (i) Si  $T_e$  est un triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ , alors  $\mu_{\mathcal{C}}(T_e) > \pi$  puisque  $\mathcal{E}_e$  contient strictement  $\mathcal{C}$ .
- (ii) Si  $T_e$  n'est pas un triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ , alors l'un des côtés du triangle  $T_e$  est inclus dans  $\partial\mathcal{C}$ , ce qui implique que l'on peut obtenir un triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  dont l'aire est arbitrairement grande en vertu du corollaire 6.1.

Enfin, dans le cas où  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ , on fait ce qui précède dans chaque intersection de  $\mathcal{C}$  avec un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , sachant que  $\mathcal{C}$  est un ellipsoïde si, et seulement si, chacune de ces intersections est une ellipse.

□

### 3 Bornes sur l'aire des triangles idéaux en géométrie de Hilbert

Nous sommes à présent naturellement amenés à nous demander si l'aire des triangles idéaux d'une géométrie de Hilbert est contrôlée.

#### 3.1 Du côté de la minoration

En ce qui concerne la minoration de l'aire des triangles idéaux, nous avons le résultat global énoncé au théorème 3 qui est valable pour n'importe quel domaine convexe de  $\mathbb{R}^n$ . Pour démontrer ceci, on va étudier au préalable le cas particulier où le domaine convexe est un triangle de  $\mathbb{R}^2$ .

**Lemme 8.** Soit  $\Delta$  un domaine convexe triangulaire du plan.

Alors tous les triangles idéaux de  $(\Delta, d_\Delta)$  ont une aire au moins égale à  $\pi^3/24$  et seul le triangle idéal de sommets les milieux des côtés de  $\Delta$  a une aire égale à ce minimum.

Ce lemme étant assez technique, nous ne donnerons que les étapes de sa preuve, renvoyant à l'annexe A.1 pour les détails. Mais auparavant, montrons comment ce lemme implique le théorème 3.

*Démonstration du théorème 3 à l'aide du lemme 8.*

Considérons d'abord le cas où  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ .

Soient  $T = abc$  un triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  et  $D_a, D_b, D_c$  des droites d'appui du convexe  $\mathcal{C}$  en  $a, b$  et  $c$  respectivement.

D'un point de vue projectif, il s'agit d'une même et unique situation. Cependant, d'un point de vue affine — celui que nous avons suivi jusqu'ici —, trois cas se présentent :

- (i) Si  $D_a, D_b$  et  $D_c$  définissent un domaine convexe triangulaire  $\Delta$  qui contient  $\mathcal{C}$ , alors on obtient le point (i) du théorème 3 en appliquant la proposition 5 (iv) (avec  $\mathcal{A} = \mathcal{C}$  et  $\mathcal{B} = \Delta$ ) et le lemme 8. En outre, si  $\mathcal{C}$  est strictement inclus dans  $\Delta$ , alors  $\mu_{\mathcal{C}}(T) > \mu_{\Delta}(T) \geq \pi^3/24$  d'après la proposition 5, d'où  $\mu_{\mathcal{C}}(T) > \pi^3/24$ , ce qui donne le point (ii) du théorème 3 en contraposant.
- (ii) Si  $D_a$  et  $D_b$  sont parallèles, on plonge le plan affine contenant le convexe  $\mathcal{C}$  dans son complété projectif (voir par exemple [Ber77], §.1) identifié naturellement à  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , dans lequel les deux droites  $D_a$  et  $D_b$  se coupent. En considérant alors une droite  $D$  qui est l'image par le plongement d'une parallèle à  $D_c$  contenue dans le demi-plan déterminé par  $D_c$  et ne contenant pas  $\mathcal{C}$ , on est ramené au point (i) dans le nouveau plan affine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus D$ .
- (iii) Si  $D_a, D_b$  et  $D_c$  définissent un domaine convexe triangulaire qui ne contient pas  $\mathcal{C}$ , on peut supposer que le triangle en question est dans le demi-plan déterminé par  $D_a$  et ne contenant pas  $\mathcal{C}$ . Dans ce cas, on plonge le plan affine contenant  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . En considérant alors une droite  $D$  image par le plongement d'une droite parallèle à  $D_a$  contenue dans le demi-plan déterminé par  $D_a$ , ne contenant pas  $\mathcal{C}$  et qui rencontre le domaine triangulaire, on est ramené au point (i) dans le nouveau plan affine  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus D$ .

Enfin, dans le cas où  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ , on applique ce qui précède à chaque intersection de  $\mathcal{C}$  avec un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

□

*Démonstration du lemme 8.*

Partant d'un domaine triangulaire  $\Delta = mpq \subset \mathbb{R}^2$  et d'un triangle idéal  $T = abc$  de  $(\Delta, d_\Delta)$ , la preuve va se faire en trois étapes.

**Étape 1 :** Elle se résume au lemme suivant, dont la preuve est en annexe A.1.

**Lemme 9.** Soit  $\Delta_0$  le domaine triangulaire de sommets  $0, e_1$  et  $e_2$ , où  $(e_1, e_2)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . Pour chaque  $\alpha \in ]0, 1/2]$ , notons  $T(\alpha)$  le triangle idéal de  $(\Delta_0, d_{\Delta_0})$  dont les sommets sont

$$a(\alpha) = (\alpha, 1 - \alpha), \quad b(\alpha) = (0, 1 - \alpha) \quad \text{et} \quad c(\alpha) = (\alpha, 0).$$

Alors il existe  $\alpha \in ]0, 1/2]$  et une transformation affine de  $\mathbb{R}^2$  qui envoie simultanément le domaine  $\Delta$  sur le domaine  $\Delta_0$  et le triangle idéal  $T$  de  $(\Delta, d_\Delta)$  sur le triangle idéal  $T(\alpha)$  de  $(\Delta_0, d_{\Delta_0})$ .

**Étape 2 :** Sachant que pour chaque  $p = (x, y) \in \Delta_0$ , la boule unité ouverte  $B_{\Delta_0}(p)$  de  $T_p\Delta_0 = \mathbb{R}^2$  pour la norme  $F_{\Delta_0}(p, \cdot)$  est un hexagone décrit dans [dlH93], p. 106-107, le calcul de la mesure de Hilbert  $\mu_{\Delta_0}$  (que nous ne détaillerons pas) nous donne

$$d\mu_{\Delta_0}(p) = \frac{\pi}{12} \times \frac{dx dy}{xy(1-x-y)}.$$

L'application  $\mathcal{A} : ]0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\mathcal{A}(\alpha) = \mu_{\Delta_0}(T(\alpha))$  est strictement décroissante de sorte que son minimum est atteint en  $\alpha = 1/2$  seulement, ce qui correspond au triangle idéal  $T(1/2)$  de  $(\Delta_0, d_{\Delta_0})$  dont les sommets sont les milieux des côtés de  $\Delta_0$  – voir les calculs dans l'annexe A.2.

**Étape 3 :** Montrons que l'aire de Hilbert de  $T(1/2)$  est égale à  $\pi^3/24$ .

D'après l'annexe A.2, cela revient à calculer

$$\mathcal{F}(0) = -2 \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx + 2 \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

puisque  $\mathcal{A}(1/2) = \frac{\pi}{12} \mathcal{F}(0)$ .

Pour déterminer le premier terme, on développe en série entière par rapport à  $\varepsilon \in ]0, 1[$  la quantité

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\varepsilon) &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x} \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \\ &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} (1-\varepsilon)^k. \end{aligned}$$

En faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous permet alors d'obtenir  $\mathcal{F}_1(0) = \pi^2/6$ .

Pour évaluer le second terme de  $\mathcal{F}(0)$ , on introduit la fonction

$$\mathcal{F}_2(\varepsilon) = \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x} \ln(1+x)$$

définie pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et qui, également à l'aide d'un développement en série entière, fournit

$$\mathcal{F}_2(0) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

En remarquant alors que  $\mathcal{F}_1(0) - \mathcal{F}_2(0) = \frac{1}{2}\mathcal{F}_1(0)$ , on obtient  $\mathcal{F}_2(0) = \pi^2/12$  et par suite  $\mathcal{F}(0) = \mathcal{F}_1(0) + \mathcal{F}_2(0) = \pi^2/2$ . Finalement, l'aire de Hilbert de  $T(1/2)$  vaut  $\mathcal{A}(1/2) = \frac{\pi}{12} \times \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^3}{24}$ .

□

### 3.2 Du côté de la majoration

Pour ce qui est de la majoration de l'aire des triangles idéaux, remarquons tout d'abord qu'il existe des géométries de Hilbert planes dans lesquelles on peut trouver des triangles idéaux d'aire aussi grande que l'on veut, et même d'aire infinie, comme le montrent les corollaires 6.1 et 6.2 de la première partie.

Néanmoins, avec quelques hypothèses de régularité, on évite les triangles idéaux d'aire infinie :

**Proposition 10.** *Soit  $\mathcal{C}$  un domaine convexe de  $\mathbb{R}^n$  dont le bord est une hypersurface de classe  $C^2$ . Alors tout triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  a une aire finie.*

*Démonstration.*

Considérons d'abord le cas où  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ .

Soit  $T = abc$  un triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  dont on oriente les sommets dans le sens trigonométrique.

Comme  $\partial\mathcal{C}$  est de classe  $C^2$ , il existe  $r > 0$  et des disques ouverts euclidiens  $D(a)$ ,  $D(b)$  et  $D(c)$  de rayon  $r$  tangents au bord de  $\mathcal{C}$  en  $a$ ,  $b$  et  $c$  respectivement et inclus dans  $\mathcal{C}$ . En considérant le sommet  $a$ , désignons par  $a'$  et  $a''$  les points d'intersection du bord de  $D(a)$  avec les segments  $]a, b[$  et  $]a, c[$  respectivement. Ainsi le triangle  $aa'a''$  a ses sommets orientés dans le sens trigonométrique et a  $\partial D(a)$  pour cercle euclidien circonscrit. En procédant de même avec les sommets  $b$  et  $c$ , on obtient les triangles  $bb'b''$  et  $cc'c''$ .

L'adhérence du complémentaire de la réunion des triangles  $aa'a''$ ,  $bb'b''$  et  $cc'c''$  dans  $T = abc$  est alors un compact inclus dans  $\mathcal{C}$ , donc d'aire de Hilbert finie. En outre, comme  $aa'a''$  est un triangle idéal de  $(D(a), d_{D(a)})$ , on a  $\mu_{D(a)}(aa'a'') = \pi$  (géométrie hyperbolique plane) et par suite  $\mu_{\mathcal{C}}(aa'a'') \leq$

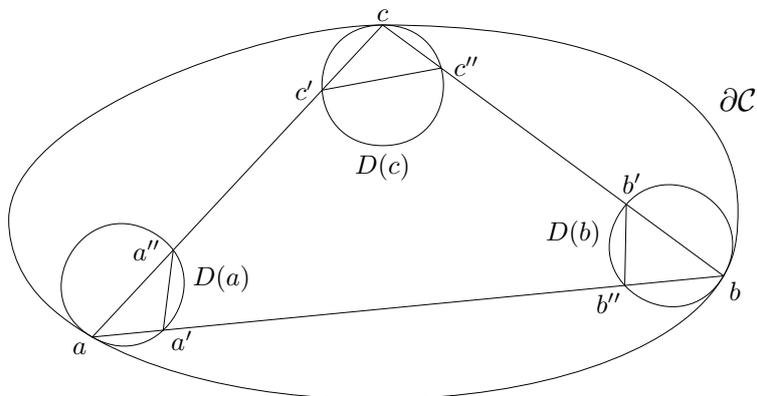


FIG. 6 – L'aire des triangles idéaux est finie dès que  $\partial\mathcal{C}$  est  $C^2$

$\pi$  en vertu de la proposition 5 (iv). Comme il en est de même avec  $bb'b''$  et  $cc'c''$ , la proposition 10 en découle lorsque  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ .

Dans le cas où  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ , on fait ce qui précède dans chaque intersection de  $\mathcal{C}$  avec un plan vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ .

□

Comme on l'a déjà vu au corollaire 6.1, dès qu'un domaine convexe  $\mathcal{C}$  du plan a un bord – même de classe  $C^2$  – qui contient un segment ouvert, alors l'aire des triangles idéaux de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}}$ ) peut être arbitrairement grande. En revanche, lorsque  $\mathcal{C}$  est un convexe strict, nous montrons que ceci ne peut pas se produire :

**Théorème 4.** *Soit  $\mathcal{C}$  un convexe strict de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une constante  $\alpha = \alpha(\mathcal{C}) > 0$  telle que tout triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}}$ ) a une aire au plus égale à  $\alpha$ .*

Avant de donner la preuve de ce théorème, notons cependant que la constante  $\alpha(\mathcal{C})$  n'admet pas de majoration uniforme en  $\mathcal{C}$ , même dans l'ensemble des convexes stricts du plan, comme le montre l'exemple suivant.

**Exemple 11.** Considérons le carré  $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$  ainsi que son homothétique  $t\mathcal{S}$  avec  $t \in ]1/2, 1[$  arbitraire. Si  $\mathcal{C}$  est un convexe du plan tel que  $t\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ , désignons par  $a_{\mathcal{C}}$ ,  $b_{\mathcal{C}}$  et  $c_{\mathcal{C}}$  les points d'intersection de  $\partial\mathcal{C}$  avec les segments fermés joignant 0 à  $a = (-1, 1)$ ,  $b = (1, 1)$  et  $c = (0, -1)$  respectivement (figure 7).

Alors  $T_{\mathcal{C}} = a_{\mathcal{C}}b_{\mathcal{C}}c_{\mathcal{C}}$  est un triangle idéal de  $\mathcal{C}$  qui contient la partie  $A(1/2, t)$  définie au corollaire 6.1 avec  $p = 0$  et  $s = 1/2$ . Le même corollaire affirmant que  $\lim_{t \rightarrow 1} \mu_{\mathcal{S}}(A(1/2, t)) = +\infty$ , il en résulte que  $\lim_{t \rightarrow 1} \mu_{\mathcal{C}}(A(t)) = +\infty$  et par suite, pour tout entier  $n > 0$ , il existe  $t \in ]0, 1[$  tel que tout domaine convexe  $\mathcal{C}$  du plan avec  $t\mathcal{S} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}$  (qu'il soit strict ou pas) vérifie  $\mu_{\mathcal{S}}(T_{\mathcal{C}}) > n$ .

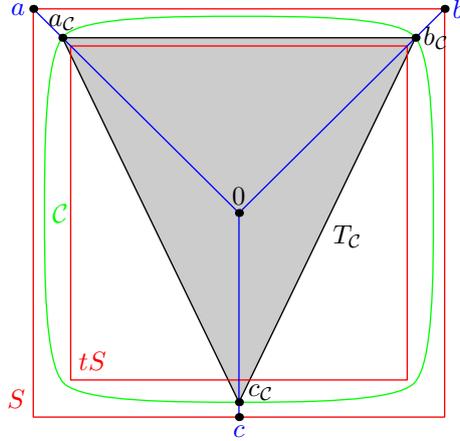


FIG. 7 – L'aire des triangles idéaux ne peut être majorée uniformément en  $\mathcal{C}$

Afin de démontrer le théorème 4, pour lequel on se ramène au cas où  $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$  par intersection avec des plans vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ , nous allons utiliser la distance euclidienne canonique  $d$  sur  $\mathbb{R}^2$  et écrire  $\mathcal{C}$  comme la réunion du compact  $K_\delta = \{p \in \mathcal{C} \mid d(p, \partial\mathcal{C}) \geq \delta\}$  – où la constante  $\delta = \delta(\mathcal{C}) > 0$  sera précisée ultérieurement – et de son complémentaire  $V_\delta = \mathcal{C} \setminus K_\delta$ . Pour majorer l'aire d'un triangle idéal quelconque  $T$  de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ , il suffira alors de majorer l'aire de la partie du triangle  $T$  hors du compact  $K_\delta$ , c'est-à-dire  $T \cap V_\delta$ . Pour cela, nous allons inclure  $T \cap V_\delta$  dans la réunion d'un certain nombre  $N = N(\mathcal{C}) > 0$  de triangles, chacun d'eux étant contenu dans un disque ouvert inclus dans  $\mathcal{C}$ .

La proposition 5 (iv) permet alors de majorer l'aire de  $T \cap V_\delta$  par  $N\pi$  en comparaison avec la géométrie du plan hyperbolique (qui est, rappelons-le, la géométrie de Hilbert d'un disque ouvert).

Finalement, on aura  $\mu_{\mathcal{C}}(T) \leq N\pi + \mu_{\mathcal{C}}(K_\delta)$ .

La preuve de ce résultat reposera sur plusieurs lemmes techniques démontrés dans l'annexe B.

Tout d'abord, le fait que  $\mathcal{C}$  soit un convexe strict assure l'existence de deux constantes  $r > 0$  et  $R > 0$  telles que le cercle de rayon  $2r$  roule à l'intérieur de  $\bar{\mathcal{C}}$  et que  $\partial\mathcal{C}$  roule à l'intérieur du disque fermé de rayon  $R$  (voir [Bla16] et [CV], p. 3). Cela va nous permettre de ramener une partie de la preuve du théorème 4 à des considérations sur les cordes de deux cercles euclidiens emboîtés et tangents données au lemme B.1.

Puis, à l'aide du lemme 12 ci-dessous, on étudiera les cordes de  $\partial\mathcal{C}$  (c'est-à-dire les segments fermés reliant deux points distincts de  $\partial\mathcal{C}$ ) en les comparant aux cordes des cercles euclidiens de rayon  $r$  (resp.  $R$ ) tangents intérieurement (resp. extérieurement) à  $\bar{\mathcal{C}}$ . Lors de la preuve du théorème 4, ces cordes seront les côtés des triangles idéaux de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  et la constante  $\delta = \delta(\mathcal{C})$  ne dépendra que de  $r$  et  $R$ .

Dans la suite, pour tous  $t > 0$  et  $\omega \in \partial\mathcal{C}$ , on désignera par  $\Gamma_t(\omega)$  le cercle de rayon  $t$  tangent à  $\partial\mathcal{C}$  en  $\omega$  et inclus dans le demi-plan fermé de  $\mathbb{R}^2$  contenant  $\omega$  dans son bord et dans lequel se trouve  $\mathcal{C}$ . Aussi, le disque ouvert correspondant sera noté  $D_t(\omega)$ .

**Lemme 12.** *Soit  $\mathcal{C}$  un convexe strict du plan. Pour tous points distincts  $a$  et  $b$  de  $\partial\mathcal{C}$ , on a :*

- (i) *Il existe un unique point d'intersection  $a'$  entre  $]a, b[$  et  $\Gamma_r(a)$ .*
- (ii) *La distance euclidienne de  $a'$  au bord de  $\mathcal{C}$  est minorée en fonction de  $d(a, b)$ ,  $r$  et  $R$  uniquement :*

$$d(a', \partial\mathcal{C}) \geq \frac{r}{4R^2} d(a, b)^2.$$

Les preuves de ce lemme et du lemme B.1 qui l'implique, seront données dans l'annexe B, tout comme le résultat suivant, qui fournit la clé du théorème 4 :

**Lemme 13.** *Soient  $\mathcal{C}$  un convexe strict du plan ainsi que  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $\partial\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) \leq r$ . Alors, l'unique rectangle ouvert  $S(a, b)$  de base le segment  $]a, b[$  et de hauteur  $r$  inclus dans  $\mathcal{C}$  vérifie*

$$\mu_{\mathcal{C}}(S(a, b)) \leq 2\pi E\left(\frac{2R}{r}\right).$$

À partir de maintenant, posons  $\delta = \frac{r^3}{4R^2}$  et introduisons

$$V_\delta = \{p \in \mathcal{C} \mid d(p, \partial\mathcal{C}) < \delta\}$$

dont le complémentaire  $K_\delta = \mathcal{C} \setminus V_\delta$  est compact, donc d'aire  $\mu_{\mathcal{C}}(K_\delta)$  finie.

Quitte à diminuer  $r$  et/ou augmenter  $R$ , on peut supposer que  $\delta$  est suffisamment petit pour que  $K_\delta$  soit convexe en utilisant l'exponentielle normale de la sous-variété  $\partial\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^2$  muni de sa métrique riemannienne canonique (voir [CV], p. 5)

*Démonstration du théorème 4.*

Soit  $T = abc$  un triangle idéal de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  dont on oriente les sommets dans le sens trigonométrique.

On va traiter trois cas selon que la longueur euclidienne des côtés du triangle  $T$  est ou non inférieure à  $r$ .

**Cas 1 :**  $d(a, b) \geq r$ ,  $d(b, c) \geq r$  et  $d(a, c) \geq r$  (figure 8).

En considérant le sommet  $a$ , désignons par  $a'$  et  $a''$  les points d'intersection du cercle  $\Gamma_r(a)$  avec les segments  $]a, b[$  et  $]a, c[$  respectivement. Ainsi le triangle  $aa'a''$  a ses sommets orientés dans le sens trigonométrique et a  $\Gamma_r(a)$  pour cercle euclidien circonscrit. En procédant de même avec les sommets  $b$  et  $c$ , on obtient les triangles  $bb'b''$  et  $cc'c''$ .

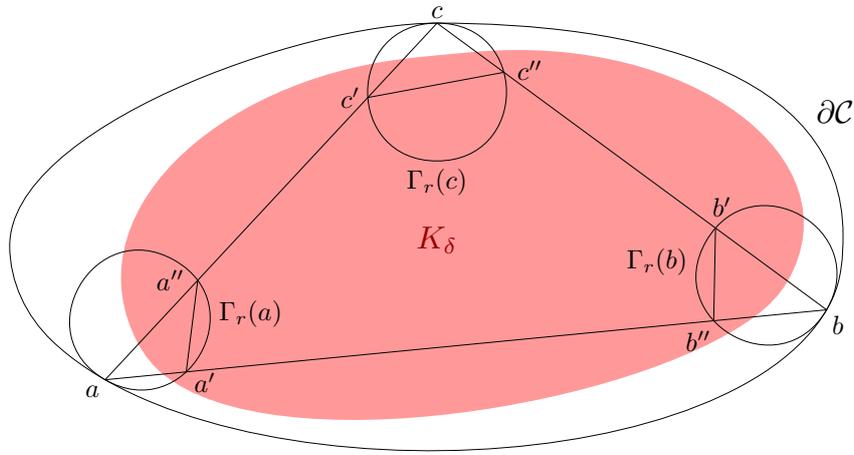


FIG. 8 – Premier cas

D'après le lemme 12 (ii), on a ici  $d(a', \partial C) \geq \delta$  et  $d(a'', \partial C) \geq \delta$ , d'où  $a', a'' \in K_\delta$  et par suite  $[a', a''] \subset K_\delta$  puisque  $K_\delta$  est convexe. De même, on a  $[b', b''] \subset K_\delta$  et  $[c', c''] \subset K_\delta$ .

Cela entraîne que  $T \cap V_\delta$  est contenu dans la réunion des triangles  $aa'a''$ ,  $bb'b''$  et  $cc'c''$ , chacun d'eux étant d'aire majoré par  $\pi$  en comparaison avec la géométrie hyperbolique associée aux disques ouverts  $D_r(a)$ ,  $D_r(b)$  et  $D_r(c)$ . On en déduit donc que  $\mu_C(T) \leq 3\pi + \mu_C(K_\delta)$ .

**Cas 2 :**  $d(a, b) \leq r$  et  $d(b, c) \leq r$ .

Soit  $m$  le projeté orthogonal du point  $b$  sur la droite  $(ac)$ . Rappelons que  $S(a, b)$  désigne le rectangle de base  $[a, b]$  et de hauteur  $r$  donné par le lemme 13.

- Supposons que  $m$  appartienne au segment  $[a, c]$  (figure 9).

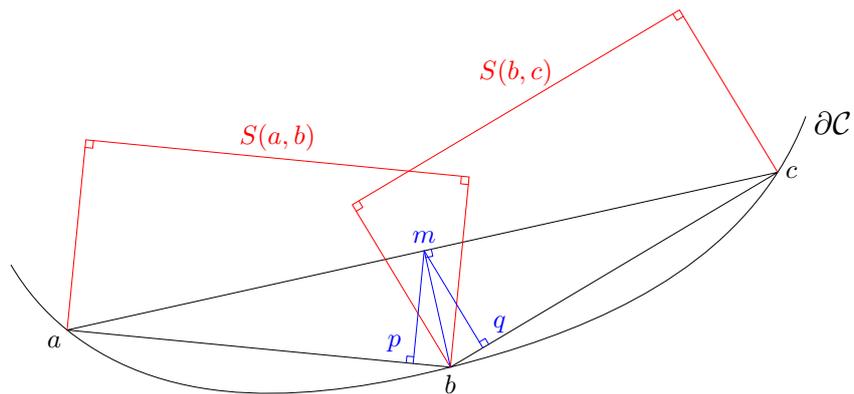


FIG. 9 – Cas  $m \in [a, c]$

Puisque le triangle  $abm$  est rectangle en  $m$ , on a  $d(m, b) \leq d(a, b)$ . Si  $p$  est le projeté orthogonal de  $m$  sur la droite  $(a, b)$ , on a de même

$d(m, p) \leq d(m, b)$  et par suite  $d(m, p) \leq d(a, b) \leq r$ . Comme en outre  $p \in [a, b]$ , il en résulte que  $m$  appartient au rectangle fermé  $\overline{S(a, b)}$ . Le même raisonnement avec le triangle  $bcm$  montre que  $m$  appartient également au rectangle fermé  $\overline{S(b, c)}$ , ce qui entraîne que les triangles  $abm$  et  $bcm$  sont inclus respectivement dans les convexes  $S(a, b)$  et  $S(b, c)$ . Or  $\overline{abm} \cup \overline{bcm} = \overline{abc}$  puisque  $m \in [a, c]$ , d'où  $\overline{T} = \overline{abc} \subset \overline{S(a, b)} \cup \overline{S(b, c)}$ . On en déduit ainsi que  $\mu_C(T) \leq \mu_C(S(a, b)) + \mu_C(S(b, c))$  et par conséquent  $\mu_C(T) \leq 4\pi E\left(\frac{2R}{r}\right)$  d'après le lemme 13.

- Supposons que  $a$  appartienne au segment  $[m, c]$  (figure 10).

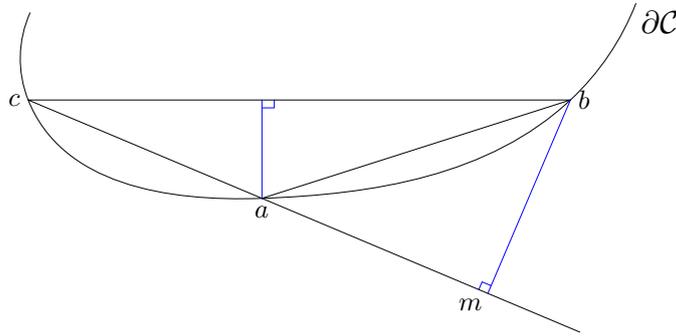


FIG. 10 – Cas  $a \in [m, c]$

Alors  $d(a, c) \leq d(m, c)$ , ce qui avec  $d(m, c) \leq d(b, c)$  (le triangle  $bcm$  étant rectangle en  $m$ ) conduit à  $d(a, c) \leq d(b, c) \leq r$ . En outre, on a ici que, en notant  $\hat{a}$  l'angle au sommet  $a$  du triangle  $abc$ ,  $\hat{a} \geq \pi/2$  et par suite le projeté orthogonal de  $a$  sur la droite  $(bc)$  est dans le segment  $[b, c]$ , ce qui permet de conclure comme dans le point précédent.

- Supposons que  $c$  appartienne au segment  $[a, m]$ .

On applique alors le point précédent en échangeant les rôles de  $a$  et  $c$ .

**Cas 3 :**  $d(a, b) \leq r$ ,  $d(b, c) \geq r$  et  $d(a, c) \geq r$ .

C'est la situation la plus délicate à traiter. Tout comme dans le premier cas, désignons par  $c'$  et  $c''$  les points d'intersection du cercle  $\Gamma_r(c)$  avec les segments  $]a, c[$  et  $]b, c[$  respectivement.

Dans ce qui suit,  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  sont les angles en  $a$  et  $b$  du triangle  $abc$ .

- Supposons  $\hat{a} \leq \pi/2$  et  $\hat{b} \leq \pi/2$  (figure 11).

Soient  $p$  et  $q$  les sommets du rectangle  $S(a, b)$  autres que  $a$  et  $b$  tels que  $p - q = a - b$ . D'après le lemme B.2, la distance euclidienne de  $p$  au centre du cercle  $\Gamma_r(a)$  est inférieure ou égale à  $(3/4)r$ , ce qui montre que  $d(p, \Gamma_r(a)) \geq r/4$ , d'où  $d(p, \partial C) \geq r/4$  puisque  $p \in D_r(a) \subset C$  (et donc  $d(p, \partial C) \geq d(p, \Gamma_r(a))$ ). De même, en considérant  $\Gamma_r(p)$ , on a  $d(q, \partial C) \geq r/4$ . De  $r/4 \geq \delta$ , on déduit alors que  $p$  et  $q$  sont dans le convexe  $K_\delta$  et par suite  $[p, q] \subset K_\delta$ .

Par ailleurs, comme  $\hat{a} \leq \pi/2$  (resp.  $\hat{b} \leq \pi/2$ ), la droite  $(ac)$  (resp.  $(bc)$ ) coupe le segment  $[p, q]$  (parallèle à  $(ab)$  qui n'est parallèle ni à  $(ac)$ , ni à  $(bc)$ ) en un unique point  $m_a$  (resp.  $m_b$ ). On a donc l'adhérence de  $T = abc$  qui est incluse dans la réunion de l'adhérence du triangle  $cc'c''$  et des enveloppes convexes de  $\{a, b, m_a, m_b\}$  et  $\{m_a, m_b, c', c''\}$ .

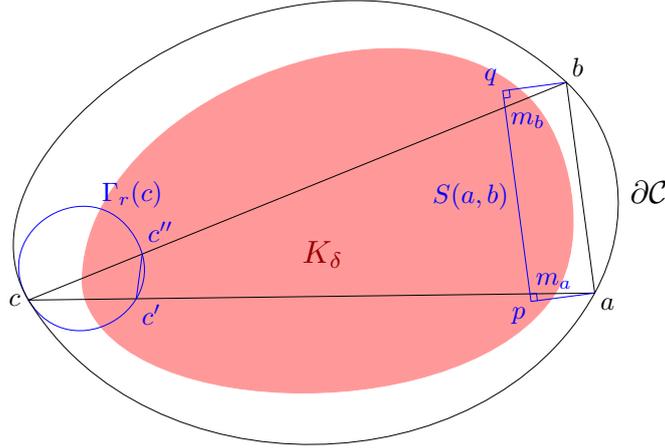


FIG. 11 — Cas  $\hat{a} \leq \pi/2$  et  $\hat{b} \leq \pi/2$

Comme d'une part  $m_a, m_b \in K_\delta$  et  $c', c'' \in K_\delta$  (même raison que dans le premier cas), l'enveloppe convexe de  $\{m_a, m_b, c', c''\}$  est dans  $K_\delta$  et puisque d'autre part  $a, b, m_a, m_b$  appartiennent au rectangle fermé  $\overline{S(a, b)}$  qui est convexe, l'enveloppe convexe de  $\{a, b, m_a, m_b\}$  est dans  $\overline{S(a, b)}$ .

Il en résulte que

$$\mu_C(T) \leq \mu_C(S(a, b)) + \mu_C(K_\delta) + \mu_C(cc'c'')$$

et par conséquent

$$\mu_C(T) \leq \pi \left( 2E \left( \frac{2R}{r} \right) + 1 \right) + \mu_C(K_\delta)$$

en vertu du lemme 13.

- Supposons  $\hat{a} > \pi/2$  (le cas  $\hat{b} > \pi/2$  se traite de façon similaire) (figure 12).

Introduisons comme précédemment les points  $p, q$  et  $m_b$  (puisque  $\hat{b} \leq \pi/2$ ) et soit en outre  $a''$  le point d'intersection du cercle  $\Gamma_r(a)$  avec le segment  $]a, c[$ .

Sachant que  $d(a, c) \geq r$ , on a  $d(a'', \partial C) \geq \delta$  d'après le lemme B.1 (ii), d'où  $a'' \in K_\delta$ . D'autre part, en raisonnant comme au point précédent, on a  $p, m_b, c', c'' \in K_\delta$  et  $a, b, p, m_b \in S(a, b)$ . Par suite, l'enveloppe convexe de  $\{p, m_b, c', c''\}$  et le triangle  $pa''c'$  sont inclus dans  $K_\delta$  alors

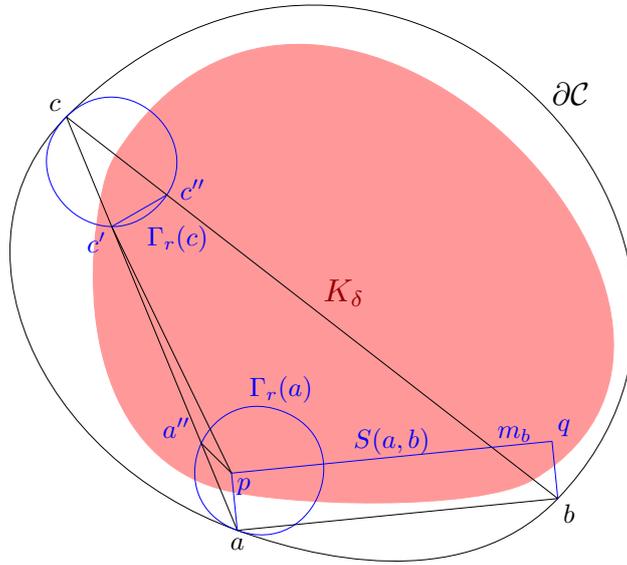


FIG. 12 – Cas où  $\hat{a} > \pi/2$

que l'enveloppe convexe de  $\{a, b, p, m_b\}$  est dans le rectangle fermé  $\overline{S(a, b)}$ .

Enfin, la convexité de  $D_r(a)$  et le fait que  $a, a'', p \in \overline{D_r(a)}$  assurent que le triangle  $aa''p$  est inclus dans  $D_r(a)$ .

Puisque l'adhérence de  $T = abc$  est contenue dans la réunion des adhérences des triangles  $pa''c'$ ,  $aa''p$  et  $cc'c''$  ainsi que des enveloppes convexes de  $\{p, m_b, c', c''\}$  et  $\{a, b, p, m_b\}$ , il s'ensuit que

$$\mu_C(T) \leq \mu_C(S(a, b)) + \mu_C(K_\delta) + \mu_C(aa''p) + \mu_C(cc'c''),$$

d'où

$$\mu_C(T) \leq 2\pi \left( E\left(\frac{2R}{r}\right) + 1 \right) + \mu_C(K_\delta)$$

d'après le lemme 13.

□

**Remarque.** Questions ouvertes concernant les majorants.

Pour conclure le présent travail, tentons de donner les hypothèses les plus faibles que l'on doit imposer à un domaine convexe donné  $\mathcal{C}$  du plan pour espérer obtenir une majoration de l'aire des triangles idéaux de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$ .

- (1) D'après le corollaire 6.1, il ne peut y avoir de segment ouvert dans le bord  $\partial\mathcal{C}$ , ce qui se traduit par le fait que  $\mathcal{C}$  doit être *affinement strictement convexe*, autrement dit que tout segment de droite ouvert entre deux points de  $\partial\mathcal{C}$  est contenu dans  $\mathcal{C}$ .
- (2) D'après le corollaire 6.2, il ne peut y avoir de « coin » dans  $\mathcal{C}$ , c'est-à-dire de point de  $\partial\mathcal{C}$  en lequel  $\mathcal{C}$  admet deux droites d'appui distinctes. Du point de vue analytique, ceci signifie que le bord  $\partial\mathcal{C}$  doit être localement le graphe d'une fonction convexe partout dérivable. Mais avec l'hypothèse de convexité, cela implique que le bord de  $\mathcal{C}$  est une courbe de classe  $C^1$  (voir [Bou76], I.32, §4). Ainsi, on peut se concentrer sur un domaine  $\mathcal{C}$  affinement strictement convexe dont le bord est  $C^1$ .
- (3) À la proposition 10, nous avons cependant eu besoin d'avoir  $\partial\mathcal{C}$  de classe  $C^2$  pour montrer que l'aire des triangles idéaux de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  est finie, et d'ajouter l'hypothèse que la courbure de  $\partial\mathcal{C}$  n'est jamais nulle pour exhiber un majorant de cette aire.

Ainsi, lorsque  $\mathcal{C}$  est affinement strictement convexe avec un bord de classe  $C^1$  sans être  $C^2$ , la finitude de l'aire des triangles idéaux de  $(\mathcal{C}, d_{\mathcal{C}})$  reste un problème ouvert. Tout comme l'est la question de savoir s'il existe un majorant de l'aire de ces triangles lorsque  $\mathcal{C}$  est affinement strictement convexe avec un bord de classe  $C^2$  dont la courbure s'annule en certains points.

## ANNEXE A LES DOMAINES TRIANGULAIRES

Rappelons que l'on s'est donné un domaine triangulaire  $\Delta = mpq \subset \mathbb{R}^2$  et un triangle idéal  $T = abc$  de  $(\Delta, d_{\Delta})$ . Il existe donc  $\lambda, \mu, \nu \in ]0, 1[$  tels que

$$a = (1 - \lambda)m + \lambda p, \quad b = (1 - \mu)p + \mu q \quad \text{et} \quad c = (1 - \nu)q + \nu m.$$

On considère par ailleurs le domaine triangulaire  $\Delta_0$  de  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$  dont les sommets sont  $0 = (0, 0, 0)$ ,  $e_1 = (1, 0, 0)$  et  $e_2 = (0, 1, 0)$  et le triangle idéal  $T(\alpha)$  de  $(\Delta_0, d_{\Delta_0})$  ayant pour sommets  $a(\alpha) = (\alpha, 1 - \alpha, 0)$ ,  $b(\alpha) = (0, 1 - \alpha, 0)$  et  $c(\alpha) = (\alpha, 0, 0)$ .

### A.1 Preuve du lemme 9

Introduisons d'abord  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application affine injective qui envoie les points  $m, p$  et  $q$  sur  $e_1, e_2$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$  respectivement. En notant

$$a' = (1 - \lambda)e_1 + \lambda e_2, \quad b' = (1 - \mu)e_2 + \mu e_3 \quad \text{et} \quad c' = (1 - \nu)e_3 + \nu e_1,$$

le triangle  $T' = a'b'c'$  est alors l'image de  $T$  par  $f$  et a ses sommets sur les côtés du triangle  $\Delta' = f(\Delta)$ .

Considérons ensuite les points

$$\begin{aligned} a'' &= \alpha(ue_1) + (1 - \alpha)(ve_2), \\ b'' &= (1 - \alpha)(ve_2) + \alpha(we_3), \\ c'' &= (1 - \alpha)(we_3) + \alpha(ue_1) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\lambda\mu\nu}{(1 - \lambda)(1 - \mu)(1 - \nu) + \lambda\mu\nu} \in ]0, 1[, \\ u &= \frac{(1 - \lambda)(1 - \mu)}{\lambda\mu} w \neq 0 \quad \text{et} \quad v = \frac{\lambda\nu}{(1 - \lambda)(1 - \nu)} w \neq 0. \end{aligned}$$

Remarquons que, quitte à remplacer  $\lambda$  par  $1 - \lambda$ ,  $\mu$  par  $1 - \mu$  et  $\nu$  par  $1 - \nu$ , on peut supposer  $\alpha \in ]0, 1/2]$ . On vérifie sans peine que  $a''$  est sur la droite  $(0a')$ ,  $b''$  sur la droite  $(0b')$  et  $c''$  sur la droite  $(0c')$ , de sorte qu'en désignant par  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$  la projection canonique, on obtient

$$(1) \quad \pi(T') = \pi(T'')$$

ainsi que

$$(2) \quad \pi(\Delta') = \pi(\Delta''),$$

où  $T'' = a''b''c''$  et  $\Delta''$  est le triangle de sommets  $ue_1$ ,  $ve_2$  et  $we_3$ .

Enfin, si  $L$  est l'application linéaire surjective de  $\mathbb{R}^3$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui envoie respectivement  $ue_1$ ,  $ve_2$  et  $we_3$  sur  $e_1$ ,  $e_2$  et  $0$ , alors  $L(\Delta'') = \Delta_0$  et  $L(T'') = T(\alpha)$ .

Comme les applications  $f$  et  $L$  sont affines et qu'on a les égalités (1) et (2), il en résulte que les géométries de Hilbert  $(\Delta, d_\Delta)$  et  $(\Delta_0, d_{\Delta_0})$  sont isométriques avec correspondance entre les triangles idéaux  $T$  et  $T(\alpha)$ .

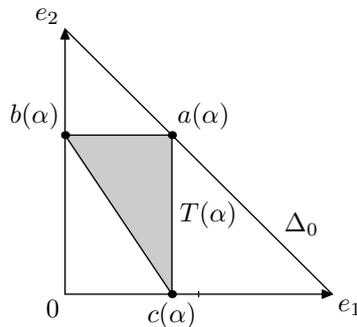


FIG. 13 – Triangle idéal  $T(\alpha)$  pour le domaine triangulaire  $\Delta_0$

## A.2 L'aire des triangles idéaux pour un domaine triangulaire

L'aire du triangle idéal  $T(\alpha)$  vaut

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{\pi}{12} \int_0^\alpha \int_{(1-\alpha)(1-x/\alpha)}^{1-\alpha} \frac{dx dy}{xy(1-x-y)}$$

et se décompose comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{12}{\pi} \mathcal{A}(\alpha) &= \int_0^\alpha \int_{(1-\alpha)(1-x/\alpha)}^{1-\alpha} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{1-x-y} \right) \frac{dx dy}{x(1-x)} \\ (3) \quad &= -2 \int_0^\alpha \frac{\ln(1-x/\alpha)}{x(1-x)} dx \\ (4) \quad &+ \int_0^\alpha \ln \left( \left( \frac{1-2\alpha}{\alpha^2} \right) x + 1 \right) \frac{dx}{x(1-x)}. \end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale (3) donne

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{\ln(1-x/\alpha)}{x(1-x)} dx &= \underbrace{\int_0^\alpha \frac{\ln(1-x/\alpha)}{x} dx}_{\text{On pose } u = x/\alpha} + \underbrace{\int_0^\alpha \frac{\ln(1-x/\alpha)}{1-x} dx}_{\text{Intégration par parties}} \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du - \underbrace{\int_0^\alpha \frac{\ln \left( 1 + \frac{\alpha-x}{1-\alpha} \right)}{\alpha-x} dx}_{\text{On pose } v = \frac{\alpha-x}{1-\alpha}} \\ (5) \quad &= \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du - \int_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\ln(1+v)}{v} dv. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'intégrale (4) s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \frac{\ln \left( \frac{1-2\alpha}{\alpha^2} x + 1 \right)}{x(1-x)} dx &= \underbrace{\int_0^\alpha \frac{\ln \left( \frac{1-2\alpha}{\alpha^2} x + 1 \right)}{x} dx}_{\text{On pose } u = \left( \frac{1-2\alpha}{\alpha^2} \right) x} + \underbrace{\int_0^\alpha \frac{\ln \left( \frac{1-2\alpha}{\alpha^2} x + 1 \right)}{1-x} dx}_{\text{Intégration par parties}} \\ &= \int_0^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \frac{\ln(1+u)}{u} du + \underbrace{\int_0^\alpha \frac{\ln \left( 1 + \frac{\alpha-x}{1-\alpha} \right)}{1 + \frac{1-2\alpha}{\alpha^2} x} dx}_{\text{On pose } v = \frac{\alpha-x}{1-\alpha}} \\ (6) \quad &= \int_0^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}} \frac{\ln(1+u)}{u} du + \frac{1-2\alpha}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \frac{\ln(1+v)}{1 - \frac{1-2\alpha}{\alpha} v} dv. \end{aligned}$$

On utilise alors dans (5) et (6) la nouvelle variable  $t = \frac{1-2\alpha}{\alpha}$  qui parcourt  $[0, +\infty[$  lorsque  $\alpha$  décrit  $]0, 1/2]$ . En posant  $\mathcal{F}(t) = \frac{12}{\pi} \mathcal{A}(\alpha)$ , on obtient ainsi

$$(7) \quad \mathcal{F}(t) = -2 \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} \mathrm{d}u + 2 \int_0^{\frac{1}{1+t}} \frac{\ln(1+v)}{v} \mathrm{d}v \\ + \int_0^t \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{d}u + t \int_0^{\frac{1}{1+t}} \frac{\ln(1+v)}{1-tv} \mathrm{d}v.$$

Enfin, le changement de variable  $w = \frac{1-tv}{1+t}$  dans la dernière intégrale de (7) conduit à

$$\mathcal{F}(t) = -2 \int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} \mathrm{d}u + 2 \int_0^{\frac{1}{1+t}} \frac{\ln(1+v)}{v} \mathrm{d}v \\ + \int_0^t \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{d}u + \int_{\frac{1}{(1+t)^2}}^{\frac{1}{1+t}} \frac{\ln(1-w)}{w} \mathrm{d}w + \ln\left(\frac{1+t}{t}\right) \ln(1+t).$$

La fonction  $\mathcal{F}$  se dérive sans trop de difficultés et, après simplifications, on obtient finalement

$$\mathcal{F}'(t) = \frac{4}{1+t} \ln\left(\frac{(1+t)^2}{(1+t)^2 - 1}\right) > 0.$$

On en déduit donc que  $\mathcal{F}$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  et par suite son minimum est atteint en  $t = 0$  seulement. Autrement dit, l'application  $\mathcal{A} : ]0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$  est strictement décroissante et atteint son minimum en le seul point  $\alpha = 1/2$ .

#### ANNEXE B LEMMES TECHNIQUES DU THÉORÈME 4

**Lemme B.1.** *Étant donné des réels  $0 < \varrho < \varrho'$ , soient  $\Gamma_\varrho$  et  $\Gamma_{\varrho'}$  les cercles euclidiens de  $\mathbb{R}^2$  passant par l'origine et de centres respectifs  $c = (0, \varrho)$  et  $c' = (0, \varrho')$ . Pour chaque point  $m$  du segment  $[0, c]$  et pour chaque vecteur non nul  $v \in \mathbb{R}^2$ , on note  $p$  (resp.  $p'$ ) le point d'intersection de la demi-droite fermée  $m + \mathbb{R}_-v$  avec  $\Gamma_\varrho$  (resp.  $\Gamma_{\varrho'}$ ) et  $q$  (resp.  $q'$ ) le point d'intersection de la demi-droite fermée  $m + \mathbb{R}_+v$  avec  $\Gamma_\varrho$  (resp.  $\Gamma_{\varrho'}$ ).*

On a alors

$$d(p, q) \geq \left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right) d(p', q').$$

En outre, lorsque  $m = 0$  (et donc  $p = p' = 0$ ), on a

$$d(q, \Gamma_{\varrho'}) \geq \left(\frac{\varrho' - \varrho}{2\varrho\varrho'}\right) d(0, q)^2.$$

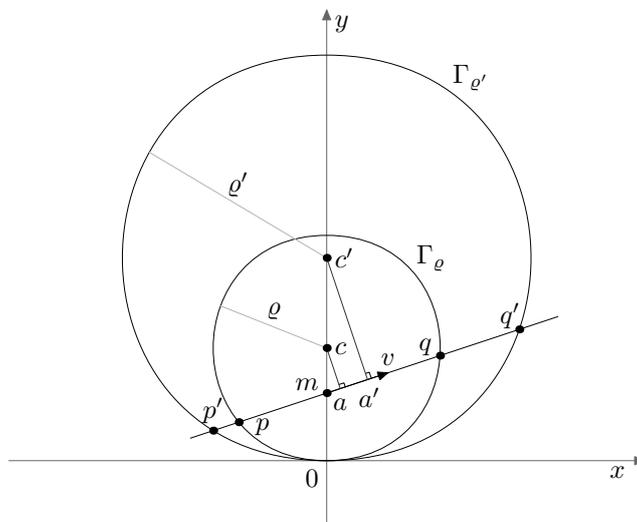


FIG. 14 – Lemme B.1

*Démonstration du lemme B.1.*

Lorsque  $p = q$ , la droite  $m + \mathbb{R}v$  est égale à  $\mathbb{R} \times \{0\}$ , ce qui entraîne que  $p' = q'$  et par suite le lemme est trivialement vérifié.

Supposons donc  $p$  et  $q$  distincts. Soient  $a$  et  $a'$  les milieux de  $(p, q)$  et  $(p', q')$  respectivement. Comme  $c$  (resp.  $c'$ ) est sur la médiatrice de  $(p, q)$  (resp.  $(p', q')$ ), le vecteur  $a - c$  (resp.  $a' - c'$ ) est orthogonal à  $v$ . Il en résulte que  $a - c$  et  $a' - c'$  sont colinéaires, d'où l'existence d'un réel  $\lambda$  tel que  $a - c = \lambda(a' - c')$ .

Or  $m, c$  et  $c'$  étant alignés ainsi que  $m, a$  et  $a'$ , on a aussi (Thalès)  $m - c = \lambda(m - c')$ . En écrivant  $m = tc$  avec  $t \in [0, 1]$  et sachant que  $c' = (\rho'/\rho)c$ , il vient

$$\lambda = \frac{1 - t}{(\rho'/\rho) - t} \in [0, 1[$$

et par conséquent  $(\rho'/\rho)\lambda \in [0, 1]$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} d(a, q)^2 = \rho^2 - d(a, c)^2 &= \rho^2 - \lambda^2 d(a', c')^2 \\ &= \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 \left\{ \rho'^2 - \left(\frac{\rho'}{\rho}\lambda\right)^2 d(a', c')^2 \right\} \\ &\geq \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 (\rho'^2 - d(a', c')^2) = \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^2 d(a', q')^2, \end{aligned}$$

ce qui démontre la première inégalité.

En ce qui concerne la deuxième inégalité, on a  $d(q, \Gamma_{\rho'}) = \rho' - d(q, c')$  et

$$\rho'^2 - d(q, c')^2 = 2\rho' d(0, q) \cos \hat{0} - d(0, q)^2$$

dans le triangle  $0qc'$ , ce qui entraîne que

$$d(q, \Gamma_{\varrho'}) \left( d(q, c') + \varrho' \right) = 2\varrho' d(0, q) \cos \hat{0} - d(0, q)^2.$$

Par ailleurs, dans le triangle isocèle  $0qc$ , on a  $d(0, q) = 2\varrho \cos \hat{0}$ , d'où il résulte que

$$d(q, \Gamma_{\varrho'}) \left( d(q, c') + \varrho' \right) = ((\varrho'/\varrho) - 1) d(0, q)^2.$$

En remarquant alors que  $d(q, c') \leq \varrho'$ , on obtient la relation désirée. □

**Lemme B.2.** Soient  $r > 0$  fixé,  $\Gamma_r$  le cercle euclidien de  $\mathbb{R}^2$  passant par l'origine et de centre  $c = (0, r)$  et  $D_r$  le disque ouvert correspondant. Pour tout  $h \in [0, r]$ , notons  $p = (-\alpha, h)$  (resp.  $q = (\alpha, h)$ ) l'intersection de la droite d'équation  $y = h$  avec  $\Gamma_r \cap (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R})$  (resp.  $\Gamma_r \cap (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ ) et soit  $p' = (-\alpha, h+r)$  (resp.  $q' = (\alpha, h+r)$ ).

Alors, si  $d(p, q) = 2\alpha \leq r$ , on a  $d(c, p') = d(c, q') \leq (3/4)r$  (les points  $p'$  et  $q'$  sont donc en particulier dans  $D_r$ ).

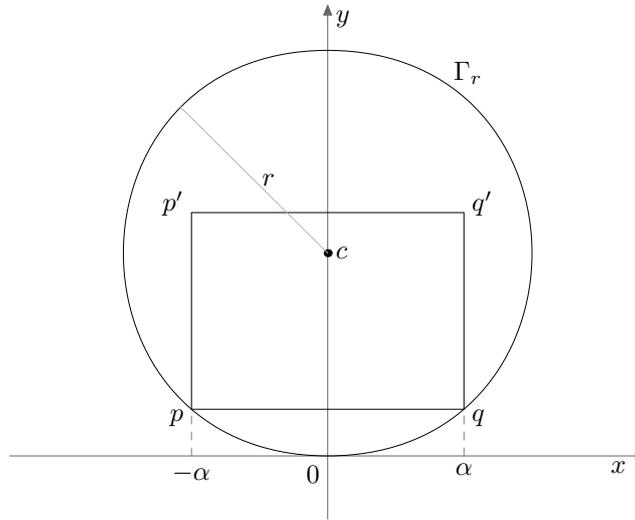


FIG. 15 – Lemme B.2

*Démonstration du lemme B.2.*

On a  $d(c, q')^2 = \alpha^2 + h^2$   
(8) et  $r^2 = d(c, q)^2 = \alpha^2 + (r - h)^2,$

d'où il résulte que  $d(c, q')^2 = 2rh$ . Comme  $\alpha \leq r/2$ , on déduit de (8) que  $h \leq (1 - \sqrt{3}/2)r$  et par suite

$$d(c, q')^2 \leq (2 - \sqrt{3})r^2 \leq r^2/2.$$

Donc  $d(c, q') \leq (\sqrt{2}/2)r \leq (3/4)r$ .

□

*Démonstration du lemme 12.*

Il existe au moins un point d'intersection  $a'$  entre  $]a, b[$  et  $\Gamma_r(a)$  car sinon soit  $b$  est dans  $\Gamma_r(a)$ , ce qui contredit le fait que le cercle de rayon  $2r$  roule à l'intérieur de  $\bar{\mathcal{C}}$ , soit  $b$  est dans le demi-plan fermé bordé par la tangente à  $\partial\mathcal{C}$  en  $a$  qui ne contient pas le convexe strict  $\mathcal{C}$ , ce qui est là encore impossible. L'unicité résulte du fait qu'un cercle coupe une droite en au plus deux points distincts et il y a déjà  $a$  et  $a'$  dans l'intersection de  $\Gamma_r(a)$  avec la droite  $(ab)$ .

Puisque  $a' \in D_{2r}(a) \subset \mathcal{C}$ , on a

$$d(a', \partial\mathcal{C}) \geq d(a', \Gamma_{2r}(a)).$$

Or, d'après la deuxième inégalité du lemme B.1 avec  $\varrho = r$  et  $\varrho' = 2r$ , on a

$$d(a', \Gamma_{2r}(a)) \geq \frac{1}{4r}d(a, a')^2$$

et d'après la première inégalité de ce même lemme avec  $\varrho = r$ ,  $\varrho' = R$ , on a  $d(a, a') \geq (r/R)d(a, m)$ , où  $m$  est le point d'intersection autre que  $a$  entre  $\Gamma_R(a)$  et la droite  $(ab)$ . Comme  $a \in \overline{D_r(a)} \subset \bar{\mathcal{C}} \subset \overline{D_R(a)}$ , on a  $b \in [a', m] \subset [a, m]$ , d'où  $d(a, m) \geq d(a, b)$  et par suite

$$d(a', \partial\mathcal{C}) \geq \frac{1}{4r} \times \left(\frac{r}{R}\right)^2 d(a, b)^2 = \frac{r}{4R^2} d(a, b)^2.$$

□

En ce qui concerne le lemme 13, il va se déduire du lemme technique suivant :

**Lemme B.3.** *Étant donné un convexe strict  $\mathcal{C}$  du plan, soient  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $\partial\mathcal{C}$  tels que  $d(a, b) \leq r$ . Alors :*

- (i) *Pour chaque  $m \in ]a, b[$ , il existe  $\omega_m \in \partial\mathcal{C} \setminus \{a, b\}$  tel que  $d(m, \partial\mathcal{C}) = d(m, \omega_m)$  avec  $m - \omega_m \perp \partial\mathcal{C}$ .*
- (ii) *L'intersection  $C(a, b)$ , entre  $\partial\mathcal{C}$  et l'un des deux demi plan fermés  $H^-(a, b)$  et  $H^+(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  bordés par la droite  $(ab)$ , vérifie  $d(m, C(a, b)) = d(m, \partial\mathcal{C})$  quel que soit  $m \in ]a, b[$ .*

*Démonstration du lemme B.3.*

- (i) Pour  $m \in ]a, b[$  fixé, la fonction  $f : \partial\mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(\omega) = d^2(m, \omega)$  étant continue sur le compact  $\partial\mathcal{C}$ , l'existence de  $\omega_m \in \partial\mathcal{C}$  tel que  $d(m, \partial\mathcal{C}) = d(m, \omega_m)$  en découle. De plus, comme  $\partial\mathcal{C}$  et  $f$  sont différentiables,  $\omega_m$  est un point critique de  $f$ , ce qui conduit à  $m - \omega_m \perp \partial\mathcal{C}$ . Enfin, si on avait  $\omega_m = a$ , on aurait alors  $(ab) \perp \partial\mathcal{C}$  en  $a$  et par suite  $b \in D_r(a)$  puisque  $d(a, b) \leq r$ . Or  $D_r(a) \subset \mathcal{C}$ , d'où il résulterait que  $b \in \mathcal{C}$ , ce qui est faux. Par conséquent, on a  $\omega_m \neq a$  ainsi que  $\omega_m \neq b$  pour la même raison.
- (ii) À présent, en notant  $C^-(a, b) = H^-(a, b) \cap \partial\mathcal{C}$  et  $C^+(a, b) = H^+(a, b) \cap \partial\mathcal{C}$ , supposons qu'il existe  $m^-, m^+ \in [a, b]$  tels que  $d(m^-, C^-(a, b)) > d(m^-, \partial\mathcal{C})$  et  $d(m^+, C^+(a, b)) > d(m^+, \partial\mathcal{C})$ .

Soient alors  $\omega^-, \omega^+ \in \partial\mathcal{C} \setminus \{a, b\}$  tels que  $d(m^-, \partial\mathcal{C}) = d(m^-, \omega^-)$  et  $d(m^+, \partial\mathcal{C}) = d(m^+, \omega^+)$  — d'où nécessairement  $\omega^- \in C^+(a, b)$  et  $\omega^+ \in C^-(a, b)$  — avec  $m^- - \omega^- \perp \partial\mathcal{C}$  et  $m^+ - \omega^+ \perp \partial\mathcal{C}$ .

On a donc  $r \geq d(a, b) \geq d(m^-, b) \geq d(m^-, C^-(a, b)) > d(m^-, \partial\mathcal{C}) = d(m^-, \omega^-)$ , d'où  $d(m^-, \omega^-) < r$  ainsi que  $d(m^+, \omega^+) < r$  de manière analogue. De là, il résulte alors que le centre  $c^- \in (\omega^- m^-)$  du cercle  $\Gamma_r(\omega^-)$  est dans  $H^-(a, b)$  et que le centre  $c^+ \in (\omega^+ m^+)$  du cercle  $\Gamma_r(\omega^+)$  est dans  $H^+(a, b)$ .

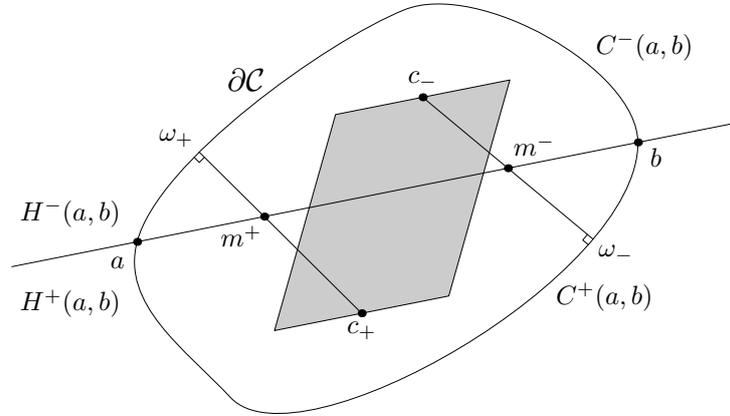


FIG. 16 — Lemme B.3 (i)

En désignant enfin par  $S^-$  (resp.  $S^+$ ) l'unique diamètre (segment fermé) de  $\Gamma_r(\omega^-)$  (resp.  $\Gamma_r(\omega^+)$ ) parallèle à la droite  $(ab)$ , l'enveloppe convexe de  $S^- \cup S^+$  (parallélogramme plein) a une intersection  $[p, q]$  avec  $(ab)$  telle que  $d(p, q) \geq 2r$ . Or, la convexité de  $\mathcal{C}$  implique que cette enveloppe convexe est incluse dans  $\bar{\mathcal{C}}$ , et par suite  $[p, q] \subset [a, b]$ . On a donc  $d(a, b) \geq d(p, q) \geq 2r$ , ce qui impossible puisque  $d(a, b) \leq r$  par hypothèse.

□

*Démonstration du lemme 13.*

- Pour chaque  $m \in ]a, b[$ , soit  $\omega_m \in \partial\mathcal{C} \setminus \{a, b\}$  tel que  $d(m, C(a, b)) = d(m, \omega_m)$  donné par le lemme B.3. Ceci entraîne que  $d(m, \omega_m) \leq r$  et par suite le cercle  $\Gamma_r(\omega_m)$  coupe la droite  $(ab)$  en deux points  $p_m \in [a, m[$  et  $q_m \in ]m, b]$  qui vérifient  $d(p_m, q_m) \geq (r/R)d(a, b)$  en vertu de la première inégalité du lemme B.1 avec  $\varrho = r$ ,  $\varrho' = R$  et  $v = b - a$ . Par ailleurs, d'après le lemme 12, soient  $a'$  et  $b'$  les uniques points d'intersection de  $]a, b[$  avec les cercles  $\Gamma_r(a)$  et  $\Gamma_r(b)$  respectivement, pour lesquels on a  $d(a, a') \geq (r/R)d(a, b)$  et  $d(b', b) \geq (r/R)d(a, b)$ , toujours d'après le lemme B.1.

Alors  $[a, a'[, ]b', b]$  et la famille  $(]p_m, q_m])_{m \in \partial\mathcal{C} \setminus \{a, b\}}$  forment un recouvrement ouvert de  $[a, b]$ , dont on peut donc extraire un sous-recouvrement fini  $\mathcal{I}$  qui est minimal pour l'inclusion. En outre, d'après ce qui précède, les éléments de  $\mathcal{I}$  sont des segments de longueurs supérieures ou égales à  $(r/R)d(a, b)$ .

À présent, montrons qu'aucun point de  $[a, b]$  ne peut appartenir à plus de deux éléments de  $\mathcal{I}$ , c'est-à-dire que si un point  $x_0 \in [a, b]$  vérifie  $x_0 \in I \cap J$  avec  $I, J \in \mathcal{I}$ , alors pour tout  $H \in \mathcal{I} \setminus \{I, J\}$ , on a  $x_0 \notin H$ .

En effet, après identification de  $[a, b]$  avec un segment de  $\mathbb{R}$  et quitte à échanger les rôles de  $I$  et  $J$ , on a  $\inf(I) < \inf(J) < \sup(I) < \sup(J)$  par minimalité de  $\mathcal{I}$ . Aussi, supposons qu'il existe  $H \in \mathcal{I} \setminus \{I, J\}$  tel que  $x_0 \in H$ .

Si on avait  $\inf(J) \leq \inf(H)$ , alors on aurait  $\sup(J) < \sup(H)$  car  $H \not\subset J$  (minimalité de  $\mathcal{I}$ ) et par suite  $J \subset I \cup H$ , ce qui est faux puisque  $\mathcal{I}$  est minimal. C'est donc que  $\inf(H) < \inf(J)$ . Or ceci impose que  $\sup(H) < \sup(J)$  car  $J \not\subset H$ , d'où il vient que  $\inf(H) < \inf(I)$  (sinon  $H \subset I \cup J$ ) et donc que  $\sup(I) < \sup(H)$  (sinon  $H \subset I$ ). Mais alors, c'est que  $I \subset H$ , ce qui, là encore, est impossible.

Notons alors  $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_n\}$ ,  $A_2 = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} I_i \cap I_j$  et  $A_1 = [a, b] \setminus A_2$ . Les ensembles  $A_1$  et  $A_2$  forment ainsi une partition mesurable de  $[a, b]$  et vérifient  $\text{Long}(I_1) + \dots + \text{Long}(I_n) = \text{Long}(A_1) + 2\text{Long}(A_2)$ .

Or,  $\text{Long}(A_1) + 2\text{Long}(A_2) = (\text{Long}(A_1) + \text{Long}(A_2)) + \text{Long}(A_2) \leq \text{Long}([a, b]) + \text{Long}([a, b]) = 2d(a, b)$ , d'où il résulte que  $n(r/R)d(a, b) \leq 2d(a, b)$  puisqu'on a vu que  $\text{Long}(I_k) \geq (r/R)d(a, b)$  pour tout  $k = 1, \dots, n$ .

Conclusion :  $n \leq E(2R/r)$ .

- On peut maintenant terminer la preuve du lemme 13 en remarquant que le rectangle fermé  $\overline{S(a, b)}$  est la réunion des rectangles fermés  $S_k$  de base le segment  $I_k$  et de hauteur  $r$  pour  $1 \leq k \leq n$ , chacun d'eux étant inclus dans un disque  $\overline{D_r(\omega_k)}$ . En effet, on a alors

$$\mu_C(S(a, b)) \leq \sum_{k=1}^n \mu_C(S_k)$$

avec

$$\mu_C(S_k) \leq \mu_{D_r(\omega_k)}(S_k)$$

pour tout  $1 \leq k \leq n$  en vertu de la proposition 5 (iv).

Or, chaque rectangle  $S_k$  étant la réunion des adhérences de deux triangles, on a  $\mu_{D_r(\omega_k)}(S_k) \leq 2\pi$  puisque tout triangle est contenu dans un triangle idéal et que  $\pi$  est l'aire d'un triangle idéal dans le disque hyperbolique. Ceci achève la preuve du lemme 13.

□

## Références

- [BBI01] **D. Burago, Y. Burago et S. Ivanov.** *A Course in Metric Geometry*, volume 33 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2001.
- [Ben01] **Y. Benoist.** Convexes divisibles. *C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math.*, 332(5) :387–390, 2001.
- [Ber77] **M. Berger.** *Géométrie*, volume 1/actions de groupes, espaces affines et projectifs. Cedic/Fernand Nathan, 1977.
- [BG88] **J. Barge et É. Ghys.** Surfaces et cohomologie bornée. *Invent. Math.*, 92(3) :509–526, 1988.
- [BH99] **M. R. Bridson et A. Haefliger.** *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1999. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics.
- [Bla16] **W. Blaschke.** *Kreis und Kugel*. Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1916.
- [Bou76] **N. Bourbaki.** *Fonction d'une variable réelle*. Éléments de Mathématiques. Hermann, 1976.
- [BP92] **R. Benedetti et C. Petronio.** *Lectures on Hyperbolic Geometry*. Springer-Verlag, 1992.
- [CV] **B. Colbois et P. Verovic.** Hilbert geometry for strictly convex domain. À paraître dans *Geometriae Dedicata*.
- [dlH93] **P. de la Harpe.** On Hilbert's metric for simplices. Dans *Geometric group theory, Vol. 1 (Sussex, 1991)*, pages 97–119. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [Hil71] **D. Hilbert.** *Les fondements de la Géométrie*, édition critique préparée par P. Rossier. Dunod, 1971.
- [Joh48] **F. John.** Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. Dans *Studies and Essays Presented to R. Courant on*

*his 60th Birthday, January 8, 1948*, pages 187–204. Interscience Publishers, Inc., New York, 1948.

- [KN02] **A. Karlsson** et **G. A. Noskov**. The Hilbert metric and Gromov hyperbolicity. *L'Enseignement des mathématiques*, 48(1-2) :73–89, 2002.
- [Lev97] **S. Levy**. *Flavors of Geometry*, volume 31 de *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [SM00] **É. Socié-Méthou**. *Comportement asymptotiques et rigidités en géométries de Hilbert*, thèse de doctorat de l'université de Strasbourg, 2000. <http://www-irma.u-strasbg.fr/irma/publications/2000/00044.ps.gz>.
- [SM02] — Caractérisation des ellipsoïdes par leurs groupes d'automorphismes. *Ann. Sci. de l'ÉNS*, 35(4) :537–548, 2002.

Bruno Colbois

Institut de mathématique  
Université de Neuchâtel  
Rue Émile Argand 11  
CH-2007 Neuchâtel  
Switzerland  
*e-mail* : Bruno.Colbois@unine.ch

Constantin Vernicos

Institut de mathématique  
Université de Neuchâtel  
Rue Émile Argand 11  
CH-2007 Neuchâtel  
Switzerland  
*e-mail* : Constantin.Vernicos@unine.ch

Patrick Verovic

Université de Savoie  
Campus scientifique  
Laboratoire de mathématique  
F-73376 Le Bourget-du-Lac cedex  
France  
*e-mail* : Patrick.Verovic@univ-savoie.fr