Le Château de la Quantification et ses Fantômes Démasqués[1]

Jean-Yves Béziau

1. Le château quantificationnel

Il est de bon ton de dire que le grand mérite de la logique moderne est d'avoir éclairci les notions de constante et de variable et d'avoir établi une théorie de la quantification. Ayant eu l'honneur d'être invité à un dîner chez des logiciens parisiens, c'est ce que dirait un paysan normand pour paraître intelligent. Cependant lorsque l'on examine de plus près le bel édifice quantificationnel on s'aperçoit qu'il s'agit d'un monstrueux château de cartes que le moindre souffle d'esprit critique est susceptible de faire tomber à plat.

Ce qui pourrait mettre la puce à l'oreille, c'est que la question «Qui a construit ce bel édifice quantificationnel?» n'est pas une question facile qui génère une réponse immédiate. Peut-être que cette puce n'aurait pas suffisamment chatouillé l'oreille de notre paysan normand qui pour continuer à paraître intelligent ajouterait que c'est Frege qui aurait construit ce bel édifice à partir de rien en l'espace de quelques années et il murmurerait entre deux coupes de champagne le mot «Begriffsschrift» en faisant glisser suavement le «ffssch» (il se serait entraîné plusieurs heures la veille face à la glace, suscitant les soupçons de sa femme qui aurait imaginé le nom d'une amante germanique).

[1] Ce travail s'inscrit dans une recherche financée par le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique, ainsi que dans le projet LOCIA (CNPq / Brésil). Nos remerciements à Alessandro Facchini pour ses subtils commentaires.

Pécuchard, c'est là le nom de notre paysan, aurait sans doute lu les œuvres de van Heijenoort qui a rendu universel ce mythe de Frege, Père de la Quantification. Toutefois, si l'on considère que la sémantique de la quantification est une pièce importante de l'édifice quantificationnel, il n'est pas anodin de constater que cette pièce n'a été produite ni par Frege, ni par Schröder, Pierce, Russell, Gödel, Hilbert, etc. mais par Tarski et ce, non pas dans son fameux article de 1936, comme beaucoup le croient, mais après la seconde guerre mondiale lorsqu'il a développé la théorie des modèles sous le soleil californien. Pourquoi, pourrait demander Pécuchard, si tardivement? Pour éclaircir son esprit à ce sujet, notre paysan pourrait lire avec profit un article de Hodges intitulé «Truth in a structure» et publié en 1985.

Il est difficile de prétendre que la sémantique tarskienne n'est qu'un petit pompon qui serait venu décorer le sommet de l'édifice quantificationnel. Au contraire, on aurait tendance à imaginer que la sémantique serait la base, le fondement de cet édifice, ou du moins l'un de ses piliers principaux. Si ce n'était pas le cas, comment cet édifice pourrait-il tenir debout? On se le demande bien. En fait le château de la quantification tel qu'on le connaît est une construction assez disparate, à laquelle ont participé de grands architectes mais qui avaient chacun des idées assez différentes, ce qui donne un résultat assez monstrueux, comme le serait un édifice conçu par Niemeyer, Gaudi et Pei.

Pécuchard pourrait s'étonner et nous demander: pourquoi, si l'édifice quantificationnel n'est qu'un château de cartes, tient-il debout depuis si longtemps? L'explication est assez simple, et a ses origines en Panurgie. La science, comme l'a bien remarqué par exemple Gorthendieck, ressemble beaucoup plus à une religion qu'on ne le croit. Une fois qu'une théorie a été lancée par quelques gourous vénérés, des centaines d'adeptes l'ânonnent à n'en plus finir pendant des siècles. Il y a d'ailleurs un exemple assez frappant en logique, c'est la théorie du syllogisme d'Aristote qui a été ânonnée pendant des siècles, et qui a été considérée par les plus grands esprits comme une théorie parfaite et achevée du raisonnement. Or aujourd'hui prétendre que la théorie d'Aristote est une théorie logique correcte serait a peu près aussi ridicule que de prétendre que la théorie de Ptolémée est une théorie physique correcte. Demain ou après-demain, la théorie néo-frégéenne de la quantification sombrera elle aussi totalement dans le ridicule. Tel est l'univers impitoyable de la science.

La faiblesse de la théorie quantificationnelle réside dans son fondement même, dans l'analyse de la notion de variable et de constante. C'est ce que nous allons critiquer ici, et non pas les lois définissant les quantificateurs, comme l'ont fait jadis les intuitonnistes et comme le font aujourd'hui les hintikkistes. Pour nous il s'agit là de révisionnistes dont les révisions sont à peu près similaires aux nombreuses révisions de détails qui ont été apportées au cours des deux mille ans de règne de la théorie d'Aristote par des pinailleurs de tout poil.

2. Les fantômes du château quantificationnel

Le château de la quantification est peuplé de variables, constantes et quantificateurs qui sont, comme on va le voir, des fantômes sans véritable réalité, résultant d'illusions d'optique.

Pécuchard aurait facilement tendance à croire que les notions de variables et de constantes telles que les entend la logique symbolique sont tout à fait différentes des notions usuelles, que l'on aurait substitué à des notions confuses, des nouvelles notions très claires et rigoureuses. En fait il n'en est rien, la manière dont sont envisagées les notions de variables et constantes est essentiellement la même. Elles sont confuses et on a construit une théorie qui, par un manège assez compliqué, rend compte de cette confusion et donc la préserve au lieu de la dissiper.

Il semble bien que le péché originel de la quantification moderne doive être attribué au vieux barbu, Frege; c'est lui en effet qui a eu l'idée de bâtir en l'air, comme l'explique bien Largeault:

> Les logiciens de la tendance algébriste, qui continuent l'œuvre de Boole, n'ont pas de langage formel. (…) Ils mettent les structures avant le langage qui les décrit. (…) Frege estime que la conception

> algébriste renverse l'ordre naturel des choses; il met le langage et les axiomes avant la structure (Largeault 1993: 11).

Quine a étendu cette conception en un dogme religieux dépassant les limites de la simple logique avec son principe «être, c'est être la valeur d'une variable».

La logique moderne néo-frégéenne considère des formules du type $\exists x \forall y(Rxy)$, qui sont des formules fantômes évoluant dans le vide, qui n'ont pas de sens avant d'être interprétées. Elles nécessitent une herméneutique, qui a été produite avec beaucoup d'huile de coude par Tarski. Le logicien néo-frégéen est fondamentalement schizophréne, il établit une distinction artificielle entre syntaxe et sémantique. Son langage formel est constitué de signes sans signification (objets complètement paradoxaux pour un linguiste). Par peur du sens, il a été amené à créer des hypostases d'une utilité douteuse.

Les formules fantômes quantificationnelles sont construites à partir d'entités fantômes: constantes indéterminées et variables.

Avant de passer à l'étude de ces objets, remarquons tout d'abord que, dans le château, il n'y a rien qui correspond à la notion de constante tout court, malgré ce que pourrait croire Pécuchard qui aurait été dupé par la rhétorique des gens du château. Un des grands manitous de ce château, fidèle apôtre de Frege, Alonzo Church, nous dit qu'en logique la notion de constante correspond à celle de nom propre des langues naturelles. Qu'est-ce qu'un nom propre? C'est un nom comme «Napoléon» désignant de façon fixe un individu, désignateur rigide dirait Kripke. Or dans la sémantique tarskienne, il n'a rien de tel, puisque ce qu'on appelle constante désigne quelque chose de fixe, une fois qu'on l'a fixé, mais on a le choix de la fixation. «La tête me tourne» nous dirait Pécuchard. Mais en fait il n'y a rien ici qu'une confusion banalement ordinaire.

Voilà comment dans un manuel pour étudiant, on décrit la notion de constante indéterminée, appelée variable:

> De temps en temps, vous trouverez avantageux de faire allusion à un membre d'un ensemble sans trop vous engager relativement à son identité précise. L'un des moyens de le faire est d'utiliser la notion de *variable*. Supposons que vous vouliez dire, à l'un de vos amis, que

> vous avez vu l'une de vos connaissances mutuelles en compagnie de votre camarade Charles, mais que vous ne désiriez pas révéler son identité, vous dites: l'autre soir j'ai vu notre ami X avec Charles. Pour notre ami, X est une *variable*. Un tel symbole se rapporte à un membre d'un ensemble, «vos connaissances mutuelles», dont il tient la place dans la phrase. Cet ensemble est appelé le champ de la variable. (…) Le mot *variable* risque d'être l'objet d'une méprise. Faites bien attention, ce n'est pas quelque chose qui varie ou change lorsque vous l'employez dans le sens que nous venons de lui attribuer. Cette variable peut prendre la place de tout objet appartenant à son champ; mais, si elle apparaît plusieurs fois le long du discours, elle représente toujours le même objet (Montjallon 1963: 10).

Montjallon n'est pas un membre du château, mais ceux-ci aussi utilisent le vocable «variable» dans les deux sens, celui de variable variable et celui de constante indéterminée. Par exemple, ils utilisent l'expression «*variable* propositionnelle». En fait, les variables propositionnelles telles qu'ils les utilisent sont des constantes indéterminées. La variable propositionnelle p peut représenter n'importe quelle proposition, son champ de variation est l'ensemble des propositions, mais elle désigne toujours la même proposition.

Mais en logique du premier ordre, les gens du château appellent constantes, ce genre de variables non variables. Ces messieurs ont l'humeur changeante. De plus la confusion ne s'arrête pas là, car ils appellent «symboles de fonction», «symboles de relation» des objets qui se comportent comme les constantes indéterminées d'individus. Dans la formule $\exists x \forall y(Rxy)$, le «symbole de relation» binaire R se comporte en effet comme une constante indéterminée. D'ailleurs certains petits malins spécialistes de zérologie définissent une constante indéterminée d'individu comme un «symbole de fonction» d'arité nulle. La zérologie met ici à jour clairement la similarité de la nature intime de ces «symboles» et des constantes indéterminées d'individu. Tout cela dépasse certainement l'imagination d'un bon paysan normand, mais il comprendra facilement la situation si on lui dit que les gens du château, lorsqu'ils utilisent des constantes indéterminées au niveau des individus, des relations, des fonctions, s'expriment comme les schtroumpfs. Si je dis «j'ai schtroumpfé la schtroumpfette», chaque mot schtroumpf de cette phrase peut être interprété fixement de différentes manières, par exemple: «j'ai sonné la sonnette» ou «j'ai pris la poudre d'escampette».

De même que les charmantes petites créatures bleues de Peyo et le langage qu'elles parlent, les constantes du château font partie d'un monde de fiction où l'on nous endort avec de jolis balivernes. La constante châtelaine, de sa vraie nature constante indéterminée, ne correspond donc à aucune réalité sans l'intervention d'un herméneute. C'est là l'une des entités fantomatiques typiques du château. Elle a pour sœur la variable variable qui se dédouble en variable libre et variable liée, qui va être la prochaine victime de notre raillerie à la grande joie de Pécuchard, qui commence lui aussi à trouver toutes ces théories bien abracadabrantes.

Un exemple de variable libre est la variable x dans $\forall y(Rxy)$. Elle doit sa liberté à l'absence d'un vilain quantificateur qui la rendrait prisonnière en la liant dans son champ. La variable libre est ambiguë, elle peut être interprétée comme constante indéterminée ou comme variable liée par un quantificateur universel. Les gens du château divergent entre eux sur la question, c'est ce qu'a bien mis en évidence Arthur de Vallauris en établissant la distinction «logique ouverte», «logique fermée». La variable libre est donc un fantôme de plus, qui peut se ramener soit au fantôme de la constante indéterminée, soit au fantôme de la variable liée.

Venons en maintenant à la variable liée, de quoi s'agit-il? Il s'agit encore d'un fantôme dont le grand Bourbaki s'était habilement débarrassé en introduisant son fameux carré, qui permettait également d'éviter que l'on emploie deux noms différents pour la même chose. Car suivant les gens du châteaux $\exists x \forall y(Rxy)$ et $\exists x \forall z(Rxz)$ sont deux formules différentes, ce qui semble bizarre si l'on pense à ce qu'elles signifient.

3. Premiers pas hors du château: retour à la réalité

Notre idée ici s'oppose diamétralement à la méthode du château qui consiste à construire artificiellement un langage dans le vide et ensuite à l'interpréter. Notre théorie s'ancre directement dans la réalité. La réalité avec laquelle nous allons commencer ce sont les objets auxquels sont censés faire référence les formules fantomatiques des gens du château, qu'ils relèguent au loin dans des domaines d'interprétation, qui sont les champs où vont s'alimenter leurs versatiles fantômes pour prendre une apparence de réalité. Nous allons plonger directement dans les champs, cela fera sans doute plaisir à Pécuchard mais aussi à tout autre individu, paysan ou non, qui préfère la réalité à la fiction.

Considérons donc un champ peuplé par, et seulement par, trois vaches: Titine, Tatane et Toutoune. Ces vaches sont notre réalité de base qui est également constituée par certaines propriétés, par exemple la relation binaire «être plus grosse que».

A partir de cela nous pouvons définir la notion de proposition atomique. Une proposition atomique est une proposition du type: Toutoune est plus grosse que Titine. Pécuchard nous dira qu'il ne voit pas tellement de différence avec la théorie des gens du château. Ouvrons lui les yeux: pour les gens du château, en logique du premier ordre, il ne peut y avoir dans une formule atomique que des fantômes: constantes, variables libres, symboles de fonction, symboles de relation, donc ni Toutoune, ni Titine, ni Tatane, ni non plus «plus grosse que».

Pour les gens du château, une formule fantôme ne prend sens que lorsqu'elle est interprétée, c'est seulement à ce moment là qu'elle peut devenir vraie ou fausse, donc leurs formules ne sont des propositions qu'en puissance.

Pécuchard pourrait faire remarquer qu'il comprend difficilement comment nous pouvons faire rentrer directement dans les propositions des vaches et la grosseur. Et il a raison. En fait nos propositions n'ont pas la capacité de mugir, mais elles sont un reflet direct de la réalité puisque nous y mettons les noms des choses, noms de vaches, noms de concepts dont nous voulons parler et non pas des constantes ou des variables. Mais vos noms ne sont-ils pas autre chose que des constantes et n'êtes vous pas obligé d'admettre l'existence d'entités telle que la grosseur que je ne voie point paître dans mon champ? pourrait nous demander Pécuchard.

La réponse à la première partie de la question est assez simple: nous évitions de parler de constante, car les gens du château ont détourné le sens du terme et entendent généralement par constante, constante indéterminée. Mais si l'on prend au sérieux la remarque de Church, ce qu'il n'a pas fait lui-même, suivant laquelle en logique on appelle constante ce qui correspond à un nom propre dans les langues naturelles, eh bien nous pouvons dire que, dans nos propositions, il n'y a que des constantes (aucune variable ou constante indéterminée).

La réponse à la deuxième partie de la question est tout aussi simple: nous n'admettons ni plus ni moins d'entités telles que la grosseur que les gens du châteaux. Les gens du château sont des hypocrites qui cachent leurs entités derrière des fantômes. Lorsqu'ils vont nourrir leurs fantômes appelés «symboles de relation» dans leurs domaines d'interprétation, il leur faut bien rencontrer des entités correspondantes. Comme le dit un comparse de Tarski, Abraham Robinson, grand pontife de la théorie des modèles:

> Nous attribuerons une totale «réalité» à toute structure mathématique donnée et nous utiliserons notre langage formel principalement pour décrire la structure, mais non pour justifier sa «réalité», son «existence» qui est considérée comme garantie (Robinson 1950).

Les gens du château ont également une conception extrêmement bizarre de la vérité, pour eux la vérité serait une propriété des énoncés, caractérisée par le célèbre schéma T de Tarski:

> «Toutoune est plus grosse que Titine» *ssi* Toutoune est plus grosse que Titine.

Si l'on considère sérieusement que les énoncés sont des inscriptions (ou des classes d'inscriptions uniformes) dénuées de signification, cela semble profondément absurde de prétendre que la vérité puisse être une propriété pouvant leur échoir. Un être n'a que les propriétés qu'il mérite, c'est-à-dire qui correspondent à sa véritable nature. Un énoncé en tant qu'inscription peut être bleu, petit, cunéiforme, propriétés dont curieusement ne nous parlent jamais les logiciens. Cette lacune a bien été notée par Queneau, dans un article intitulé «Quelques remarques sommaires relatives aux propriétés aérodynamiques de l'addition», où il écrit:

> Dans tous les tentatives faites jusqu'à nos jours pour démontrer que 2+2=4, il n'a jamais été tenu compte de la vitesse du vent. L'addition des nombres entiers n'est en effet possible que par un temps assez calme pour que, une fois posé le premier 2, il reste en place jusqu'à ce que l'on puisse poser ensuite la petite croix, puis le second 2, puis le petit mur sur lequel on s'assoit pour réfléchir et enfin le résultat (Queneau 1950: 187).

Ce sont les faits qui sont vrais ou faux, et dire qu'un énoncé est vrai est aussi ridicule que de dire que le nom de camembert «Belle des près» est fondant en bouche. Certes on essaye d'établir un rapport entre le nom et la chose, mais cela ne veut pas dire que les propriétés de l'objet soient ainsi magiquement transposées au nom. Qu'il existe un rapport est important, c'est d'ailleurs là la véritable nature du symbolisme. En logique le rapport va être non entre le nom et la chose, mais entre la proposition et la véracité des faits, la proposition est censée refléter la structure de vérité des faits.

Du point de vue de la logique classique, une telle structure correspond à la matrice booléenne définie sur l'ensemble des deux valeurs de vérité, vrai et faux. Nous avons donc besoin d'une similarité entre cette matrice, où plus précisément l'algèbre sous-jacente à la matrice, et nos propositions. C'est ainsi que les Polonais, depuis Lindenbaum, conçoivent l'ensemble des propositions comme une algèbre absolument libre de même type que l'algèbre booléenne sous-jacente à la matrice. Ainsi le rapport entre la structure des propositions et la structure de la vérité est un rapport établi par des morphismes entre ces structures, c'est donc un rapport parfaitement symbolique. L'abordage polonais a été essentiellement développé pour la logique propositionnelle, qui est le joujou favori des logiciens polonais. Nous allons montrer ici comment on peut étendre cet abordage à la quantification.

Pécuchard pourrait nous demander de quel chapeau magique nous tirons cette matrice booléenne. J'ai bien regardé dans mon champ nous dirait-il, mais je n'ai rien trouvé de tel. En fait nous considérons que cette structure fait partie de la réalité, et une fois de plus nous ne sommes ici ni plus ni moins extravagant que les gens du château qui, au niveau propositionnel, la présuppose sans arrêt sans en parler explicitement et qui, au niveau quantificationnel, ne présupposent qu'un confus fatras qu'ils seraient bien incapables d'exposer clairement.

Pour nous une proposition moléculaire du type «Toutoune est plus grosse que Titine *et* Tatane est plus grosse que Titine» n'est pas un simple énoncé, une inscription ou en ensemble équiforme d'inscriptions, c'est quelque chose qui reflète la structure véritative des faits. En l'occurrence cette proposition moléculaire est l'image par la fonction connective *et* des deux propositions atomiques qui la composent. A cette fonction connective *et* correspond dans l'algèbre booléenne la fonction de vérité conjonctive. Les gens du château désignent par le même symbole, dans ce cas $\wedge$, fonction connective et fonction de vérité passant sous silence cette distinction essentielle.

Nos propositions moléculaires correspondent à des faits complexes qui sont la combinaison de faits simples. Cela ressemble un peu à du Wittgenstein, nous dirait Pécuchard qui a coutume de lire le *Tractatus* à l'ombre des pis de ses vaches, pendant les chaudes journées d'été. Rien d'étonnant puisque Wittgenstein, maudit par les gens du château, a été le seul à mettre un peu de réalité dans la logique moderne.

Continuons un peu notre chemin avec Wittgenstein. C'est lui qui a promu l'idée de vérité logique comme tautologie. Selon lui, une tautologie est une chose dépourvue de sens qui ne nous dit rien sur la réalité, par exemple lorsque je sais que «Toutoune est plus grosse que Titine ou Toutoune n'est pas plus grosse que Titine», je ne sais rien sur Toutoune, Titine et leurs grosseurs respectives.

A quoi sert donc la logique? nous demanderait Pécuchard. En fait il est un peu exagéré de dire avec Wittgenstein que la logique ne nous dit rien sur la réalité, elle décrit en fait la structure logique du réel. Le champ de Pécuchard avec ses trois vaches est une réalité qui a une dimension logique, de même qu'elle a une dimension physique, biologique, chimique, etc. Cette dimension logique est ni plus ni moins réelle que sa dimension physique. Bien sûr on pourrait dire que la logique classique ne reflète pas la véritable dimension logique de cette réalité, qu'il nous faut une autre logique, mais on pourrait en dire autant de la dimension physique de cette réalité.

4. La quantification expliquée aux enfants

Une fois que l'on est sorti du château de la quantification, que l'on a dit adieu aux fantômes qui le peuplent, lorsque l'on a repris contact avec la réalité, la quantification est une chose extrêmement simple, qu'un enfant sorti du berceau peut facilement comprendre, plus facilement par exemple que la négation, comme l'a montré Piaget.

Dans le cas d'un domaine fini d'objets, les formules quantificationnelles usuelles peuvent toujours être exprimées à l'aide des connecteurs propositionnels. La quantification dite universelle est exprimée à l'aide de la conjonction et la quantification existentielle à l'aide de la disjonction. N'en déplaise à Pécuchard, quittons les grosses vaches et considérons comme réalité de base, l'ensemble des cinq nombres 1, 2, 3, 4, 5 et la relation d'ordre strict < entre eux. Donnons quelques exemples de propositions quantificationnelles:

Tous les nombres sont plus petits que 2:
$1<2 \wedge 2<2 \wedge 3<2 \wedge 4<2 \wedge 5<2$

Il existe un nombre plus petit que 3:
$1<3 \vee 2<3 \vee 3<3 \vee 4<3 \vee 5<3$

Il existe un nombre plus petit que tous les autres:
$(1<1 \wedge 1<2 \wedge 1<3 \wedge 1<4 \wedge 1<5)$
$\vee\ (2<1 \wedge 2<2 \wedge 2<3 \wedge 2<4 \wedge 2<5)$
$\vee\ (3<1 \wedge 3<2 \wedge 3<3 \wedge 3<4 \wedge 3<5)$
$\vee\ (4<1 \wedge 4<2 \wedge 4<3 \wedge 4<4 \wedge 4<5)$
$\vee\ (5<1 \wedge 5<2 \wedge 5<3 \wedge 5<4 \wedge 5<5)$

Tout cela est de la logique pour bambin de trois ans, nous dirait Pécuchard. Certes, mais lorsque l'on compare ces formules à celles du château, commencent à apparaître des subtilités dont certains vieillards de la logique n'ont pas perçu toute la signification.

On peut considérer que les trois quantifications ci-dessus peuvent être abrégées respectivement par $\forall x(x<2)$, $\exists x(x<3)$, $\exists x \forall y(x<y)$. A priori il n'y a aucun mal à cela, pourquoi faire long lorsque l'on peut faire court. Mais utilisant ces abréviations nous opérons des abus de langage dont il faut être conscient. D'ailleurs nous avons déjà abusé Pécuchard. En fait dans notre logique la conjonction

$$1<2 \wedge 2<2 \wedge 3<2 \wedge 4<2 \wedge 5<2$$

n'existe pas à proprement parler. Ce qui existe c'est une proposition du type:

$$((((1<2 \wedge 2<2) \wedge 3<2) \wedge 4<2) \wedge 5<2).$$

En utilisant l'associativité de la conjonction, on peut identifier plusieurs formules à la conjonction, c'est ce que font les gens du château avec leurs fantômes. Ils identifient aussi les variations commutationelles, par exemple:

$$((((2<2 \wedge 1<2) \wedge 3<2) \wedge 4<2) \wedge 5<2)$$

On pourrait leur demander pourquoi s'arrêter en si bon chemin et ne pas aussi réduire à la formule $\forall x(x<2)$, des formules du type:

$$((((1<2 \wedge 2<2) \wedge 3<2) \wedge 4<2) \wedge 5<2 \wedge 5<2)$$

$$((((1<2 \wedge 2<2) \wedge 3<2) \wedge 4<2) \wedge 5<2) \wedge ((((1<2 \wedge 2<2) \wedge 3<2) \wedge 4<2) \wedge 5<2).$$

Ils seraient bien incapables de répondre, et pour cause: il n'y a pas moyen de fixer raisonnablement une barrière sur le chemin qui nous mène en direction de l'algèbre de Tarski-Lindenbaum.

Nous défendons l'idée d'une cohérence fondée sur l'uniformité, c'est la raison pour laquelle, pour nous, une abréviation du type $\forall x(x<2)$ correspond non pas à une proposition, mais à un ensemble de propositions distinctes. Par contre suivant notre point de vue, de même que dans le palace des Bourbakis et contrairement à ce qui se passe au château, les deux abréviations $\forall x(x<2)$ et $\forall y(y<2)$ abrègent la même chose.

Si l'abréviation $\exists x \forall y(x<y)$ peut être considérée en tirant bien sur les cheveux comme une formule du château, remarquons que ce n'est pas le cas des formules $\forall x(x<2)$, $\exists x(x<3)$. Rappelons en effet que dans les formules du château il ne peut y avoir que des fantômes et aucun objets réels tels que 2 et 3. Pécuchard nous reprendrait peut-être ici et nous dirait que dans les propositions qui appartiennent à l'ensemble synthétisé par l'abréviation $\exists x \forall y(x<y)$, il y a aussi des objets réels. C'est vrai et c'est pour cela que nous avons dit qu'il fallait bien tirer sur les cheveux.

Pour décrire la spécificité des propositions correspondant à la formule $\exists x \forall y(x<y)$ par rapport à des propositions correspondant à la formule $\forall x(x<2)$, employons la terminologie des gens du château: dans le premier cas il n'y a pas de variable libre. Ce qui veut dire en fait, de notre point de vue, que dans ce genre de propositions on ne dit rien à propos d'un objet particulier, mais seulement des généralités portant sur tous les objets. C'est ce genre de propositions que nous appellerons à proprement parler des quantifications.

Suivant notre théorie toute quantification universelle se réduit à une conjonction, cependant toute conjonction ne se réduit pas à une quantification universelle. Par exemple la conjonction suivante n'est pas une quantification universelle:

$$1<2 \wedge 2<2 \wedge 3<2 \wedge 4<2.$$

On peut dire la même chose des quantifications existentielles.

Une question que l'on peut se poser est la suivante: est-ce que les quantifications universelles et existentielles sont les seules quantifications? c'est-à-dire, est-ce les seules propositions ne disant que des généralités? Cette question appelle deux nons. Tout d'abord, il y a des quantifications obtenues par composition avec d'autres connecteurs, deux apparaissent dans le carré de la quantification et deux autres encore dans son extension hexagonale construite par Blanché. Par ailleurs il y a encore d'autres quantifications qui ne sont pas considérées par les gens du château, mais que l'on peut facilement construire avec notre méthode réaliste comme cela nous a été suggéré par des indigènes lors d'un récent périple dans le Nord du Brésil. Par exemple, nous pouvons construire la proposition quantificationnelle «tous sauf un exactement», ou «tous sauf deux exactement», etc. Par contre il n'y a pas de quantifications correspondant aux expressions du langage naturel «presque tous», «peu», «beaucoup».

5. Les vertiges de l'infini

Ce que pourrait nous dire Pécuchard, c'est que tout cela est bien joli, mais que lorsque l'on passe à l'infini notre théorie ne fonctionne plus, car il nous faut des formules infinies. Et là tout se complique et dépasse l'imagination des jeunes et des moins jeunes.

En fait, comme nous allons le montrer, tout cela repose sur certains malentendus. D'une part notre théorie ne fait pas plus usage de l'infini que la théorie des gens du château, le fait est qu'ils camouflent l'infini à l'aide de fantômes finis. D'autre part l'infini n'a rien de mystérieux et peut être compris pas des enfants sortis du berceau.

Considérons comme ensemble d'objets l'ensemble des entiers naturels. C'est un ensemble infini d'objets et tout le monde comprend de quoi il s'agit. En particulier il n'y a pas un nombre plus grand que tous les autres. Autrement dit, pour tout nombre, nous pouvons en trouver un plus grand que lui, ce qui s'exprime par la formule fantomatique $\forall x \exists y(x<y)$. Cette formule, si l'on généralise la théorie exposée dans la section précédente, correspond à la conjonction infinie de disjonctions infinies suivante:

$$
\begin{array}{l}
0<0 \vee 0<1 \vee 0<2 \vee 0<3 \vee 0<4 \vee \ldots \\
\wedge\ 1<0 \vee 1<1 \vee 1<2 \vee 1<3 \vee 1<4 \vee \ldots \\
\wedge\ 2<0 \vee 2<1 \vee 2<2 \vee 2<3 \vee 2<4 \vee \ldots \\
\wedge\ 3<0 \vee 3<1 \vee 3<2 \vee 3<3 \vee 3<4 \vee \ldots \\
\wedge\ 4<0 \vee 4<1 \vee 4<2 \vee 4<3 \vee 4<4 \vee \ldots \\
\ldots
\end{array}
$$

Comme nous décrivons une situation où sont impliqués une infinité d'objets, il n'est pas étonnant, vu notre méthode ancrée dans le réel, qu'apparaissent un nombre infini d'objets. Si l'on admet que dans le cas de l'ensemble des entiers naturels la formule fantomatique parle de l'infini, alors infini il y a.

Si nous désignons un ensemble infini par une lettre, comme par exemple la lettre N pour l'ensemble des entiers naturels, cela n'amoindrit pas l'infinité de cet ensemble. Et si au lieu d'utiliser la lettre N, nous utilisons l'écriture suivante:

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Cette notation n'est ni plus ni moins fini que la lettre N – nous n'avons en particulier utilisé que *trois* petits points – mais elle a l'avantage d'être moins hypocrite, plus intuitive, plus proche de la réalité à laquelle elle renvoie, plus symbolique donc, au sens véritable du terme. Comme ce qui nous intéresse c'est la réalité et non la fiction, il vaut mieux employer une notation qui nous permette de nous blottir tout contre elle.

Et dans le cas des formules ces différences sont fondamentales, car il ne s'agit pas seulement de différences d'écriture, nos formules infinies sont des propositions construites avec des fonctions connectives qui sont des fonctions d'arité infinie. La sémantique des quantifications infinies est la généralisation logique de la sémantique des quantifications finies. On considère des fonctions de vérité définies sur $\{0,1\}$ d'arité infinie qui correspondent aux fonctions connectives. Ces fonctions infinies n'ont, elles non plus, rien de mystérieux ou d'extravagant.

L'infini est un océan sur lequel les mathématiciens ont coutume de naviguer sans problème et aujourd'hui ils disposent de solides bateaux peu susceptibles de couler au fond de cet océan. Si l'on veut rendre compte du raisonnement mathématique, il ne faut pas avoir peur de s'aventurer sur cet océan. C'est même une obligation. C'est une illusion de croire que l'on pourrait rendre compte des manœuvres des mathématiciens, en les regardant naviguer au loin, comme un paysan normand perché sur la falaise d'Etretat.

Le projet finistico-formaliste reposait sur l'idée que l'infini était la source des paradoxes et qu'en l'éliminant, on s'en débarrasserait. Or cette soi-disant connexion intime de l'infini avec les paradoxes n'est qu'une croyance de bonne sœur, elle n'a jamais été démontrée. Au contraire, on a exhibé de nombreux paradoxes dans lesquels l'infini ne joue aucun rôle essentiel et dont certains ressemblent cependant beaucoup à des paradoxes dans lesquels l'infini entre en jeu, montrant que ce qui est paradoxal dans ces paradoxes n'est pas essentiellement lié à l'infini.

De fait, l'infini n'est ni plus ni moins contradictoire que le fini. Ce qui a été reproché à Cantor, c'était de trop se rapprocher de Dieu. Pécuchard nous dirait qu'il ne voit pas bien le rapport entre Dieu et l'infini mathématique et c'est vrai que ce n'est pas évident. Ce qui est clair c'est que des curés voulant contrôler la vie des hommes et leurs pensées voyaient d'un mauvais œil des constructions qu'ils avaient du mal à comprendre et qui leur semblaient pouvoir chatouiller le bout des pieds de l'être suprême.

6. L'insoutenable existence du quantificateur existentiel

Dans le château de la quantification, on emploie la terminologie quantificateur universel et quantificateur existentiel et les symboles respectifs $\forall$, $\exists$ dont l'origine provient de la première lettre renversée des concepts correspondants. Pendant longtemps, on utilisait les parenthèses à la place de $\forall$, par exemple on écrivait $\exists x(y)(x<y)$ à la place de $\exists x\forall y(x<y)$. Le symbole $\forall$ a été introduit par Gentzen, par souci de symétrie. Mais, pourrait nous faire remarquer Pécuchard, ce symbole ne ressemble pas à la première lettre renversée du mot «universel», à moins qu'universel ne commence par un A en allemand. Non, ce n'est pas le cas. Par contre en allemand, A est la première lettre de *Alles*, tout comme en anglais A est la première lettre de *All*. Et comme «universel» dans «quantificateur universel» est censé signifier «tous», qui commence par un A en allemand et en anglais, Gentzen a choisi le symbole $\forall$.

Si l'on n'a aucune raison de pinailler avec la logique de l'expression «quantificateur universel», qui remplace naturellement l'expression impossible «quantificateur toussel», la situation de l'expression «quantificateur existentiel» est bien différente. Se cache derrière elle une des plus grandes escroqueries de la logique moderne. On a tendance à penser que de la même manière que la quantification universelle signifie «pour tous», la quantificateur existentiel, signifie «il existe» et que son emploi consiste à affirmer ou à poser l'existence d'êtres. Il y aurait donc aussi des êtres dans ce château peuplé de fantômes! En fait le quantificateur dit existentiel ne pose l'existence d'aucun être. Par contre il lui faut des êtres pour prendre sens.

Lorsqu'on envisage la quantification existentielle dans sa véritable nature, comme un certain type de disjonction, on voit qu'elle signifie vraiment: parmi un ensemble d'objets **donnés**, *au moins un* a telle propriété.

Souvent, à la place de cette expression un peu longuette, on dit plus simplement «il y a un objet qui a telle propriété», «il existe un objet qui a telle propriété». On évacue le «au moins» ce qui déjà est une erreur dont nous ne parlerons pas ici, ensuite en évacue le «parmi un ensemble d'objets donnés», ce qui donne l'impression d'une entrée en existence de l'objet ayant ladite propriété.

Or le quantificateur existentiel n'a pas plus le pouvoir de faire entrer en existence des objets que le sceptre du Pape, ou plus bêtement, qu'un quantificateur universel. Le quantificateur existentiel est dual du quantificateur universel et possède les mêmes propriétés chimiques et alchimiques que lui. On peut d'ailleurs définir le quantificateur existentiel à partir de l'universel et de la négation. Si l'on considère que ces deux objets logiques n'ont pas le pouvoir de générer des êtres, on voit mal comment surgiraient des êtres de leur combinaison, à moins d'imaginer que cette combinaison soit une véritable copulation.

De la même façon que $A \wedge B \rightarrow A \vee B$, suivant notre théorie nous avons $\forall x Px \rightarrow \exists x Px$. Cela pour nous est tout ce qu'il y a de plus logique. Les gens du château admettent la validité de la formule $\forall x Px \rightarrow \exists x Px$ car la sémantique tarskienne qui leur sert de béquille présuppose toujours que le domaine est non vide, mais suivant leur logique existentielle cette formule devrait être fausse. N'ayant pas le courage de sacrifier Tarski, ils renoncent de fait à leurs ambitions existentialistes, bien qu'ils continuent toujours à jeter de l'existence aux yeux des normands et à dire existence par-ci, existence par-là, existence à tout bout de champ.

Pour nous, une telle présupposition n'est nullement une hypothèse superfétatoire dont nous voudrions nous libérer. En effet s'il n'y a aucun objet, suivant notre théorie il n'y a pas matière à construire des propositions, il n'y a aucune proposition. Si le monde n'existait pas, il n'y aurait rien à en dire. Voilà une lapalissade qui a échappé aux gens du château tout occupés qu'ils étaient à bâtir en l'air, à construire des langages indépendamment de la réalité.

Si l'on constate que le quantificateur existentiel n'a rien à voir avec l'existence, on se demande comment quelqu'un comme Carnap a pu avoir l'arrogance de prétendre que seuls les logiciens modernes avaient compris ce qu'était l'existence avec leur quantificateur existentiel, alors que Saint Anselme, René Descartes et Jean-Sol Patre se seraient grossièrement trompés.

Il est vrai toutefois que l'expression «il y a» est employée de façon ambiguë dans le langage courant. Cela nous permet d'avoir une certaine indulgence pour les mathématiciens, mais cependant pas pour Carnap et les logiciens qui ont voulu rendre compte du raisonnement mathématique en construisant le château de la quantification. Où est l'ambiguïté? On peut distinguer deux sens assez différents de «il y a». Quand nous disons «Il y a une vache qui est noire dans notre champ», cette déclaration n'amène à l'existence aucune vache; cela signifie que parmi les vaches du champ, l'une a la propriété d'être noire. Par contre, lorsque nous disons «Il y a du bois dans la cheminée», nous signalons la présence de l'élément bois; nous ne voulons pas dire que, parmi les objets qui sont dans la cheminée, il y en a un qui a la propriété d'être du bois. De la même façon, si nous disons «Dieu existe», nous n'entendons pas par là une disjonction finie ou infinie suivant laquelle, parmi les objets de l'univers, un aurait la propriété d'être Dieu. De même lorsque nous disons «j'existe».

7. L'indéfinissable identité de l'identité

L'identité est une des notions les plus fondamentales de la pensée. Si l'on regarde ce que les philosophes ont dit à ce sujet, on est effrayé par la quantité de sornettes qu'ils ont débitées. On pourrait croire que les logiciens modernes de la même manière qu'ils ont su si admirablement, à l'aide de la torche de la raison, éclairer les notions d'existence, de contradiction et d'infini, ont porté une lumière nouvelle sur cette notion et écarté les ombres qui rôdaient autour d'elle. En fait il n'en est rien, la clarté qu'ils ont apportée n'est qu'illusoire, la théorie du château est particulièrement confuse à ce sujet.

Il y a plusieurs conceptions de l'identité, mais il y a en une qui est particulièrement simple: l'identité est une relation binaire suivant laquelle chaque objet est en relation avec lui-même et avec aucun autre. C'est ce que l'on peut appeler la conception triviale de l'identité ou encore diagonale, du fait que, si l'on représente le produit cartésien d'une relation binaire par une matrice constituée de paires, la diagonale de cette matrice correspond à l'identité.

Lindenbaum et Tarski (1927) ont montré que cette notion et son contraire (la relation de différence) ainsi que la relation universelle et son contraire (la relation vide) sont des notions logiques, les seules en fait, si l'on définit la notion de notions logiques à partir de celle d'invariance absolue.

Cependant la relation d'identité diagonale n'est pas axiomatisable en logique du premier ordre, ce fait surprenant est rarement mentionné dans les ouvrages de logique. On donne souvent des exemples beaucoup plus compliqués de relations non axiomatisables, comme la notion de bon ordre, notion pas forcément compréhensible par un paysan normand. Mais une fois cette notion expliquée à Pécuchard, il pourra avoir facilement une intuition qui lui fasse comprendre pourquoi elle n'est pas axiomatisable en premier ordre: il s'agit typiquement d'une notion qui nécessite une quantification de deuxième ordre. «Toute partie a un plus petit élément»: on voit mal comment on pourrait paraphraser la quantification de deuxième ordre portant sur des ensembles «toute partie» avec une quantification de premier ordre portant sur des individus.

La problème lié à la non axiomatisation de la relation d'identité est d'un autre ordre. Suivant les théories du château, l'identité diagonale n'est pas même formulable. Ce qui rend impossible la formulation de ce principe est l'ambiguïté inhérente à la variable: chaque variable varie autant qu'elle le souhaite, pêche ce qu'elle veut, si bien que deux variables peuvent pêcher le même poisson.

Les gens du château peuvent facilement formuler la première partie de l'axiome d'identité, tout objet est identique à lui-même: $\forall x(x=x)$, mais lorsqu'ils en viennent à la deuxième partie, ils bafouillent: comment dire que tout objet est différent de tous les autres? Si on écrit la formule $\forall x(x=x \wedge \forall y(x\neq y))$, on voit bien le problème, le y peut entrer en collision avec le x et on obtient une contradiction. Par ailleurs si, pour empêcher cette collision, on rajoute une spécification visant à créer deux domaines de pêche disjoints, on obtient alors une tautologie qui fait que la formule obtenue $\forall x(x=x \wedge \forall y(x\neq y \rightarrow x\neq y))$ se réduit à $\forall x(x=x)$. Les gens du château oscillent et ne trouvent donc pas de passage entre les Charybde et Scylla de la logique, la contradiction et la tautologie.

Dans notre théorie, nous avons fait fi de la notion de variable, donc pour nous ce problème ne se pose pas, mais pouvons-nous définir l'identité? Considérons de nouveau notre petit domaine d'êtres. Nous pouvons décrire le fait que 1 est identique à lui-même et différent des autres de la façon suivante

$$1=1 \wedge 1\neq 2 \wedge 1\neq 3 \wedge 1\neq 4 \wedge 1\neq 5$$

et de façon similaire pour 2, 3, 4, 5. Cependant cette conjonction et la conjonction de ces conjonctions ne correspondent pas à une quantification universelle, c'est une conjonction qui n'est pas une quantification.

L'indéfinissabilité de l'identité a d'innombrables conséquences, en particulier en résulte l'indéfinissabilité de la notion de fonction (à partir de la notion de relation).

8. Morale de l'histoire

La morale de ce petit conte normand est qu'une fois démasqués les fantômes, une fois constatée l'inanité des théories du château, on doit repartir à zéro et la situation à laquelle on doit faire face est bien différente de celle que l'on imaginait. Fini les tours de passe à passe avec variables liés et variables libres, les voltiges avec les constantes indéterminées. Tout ce qui paraissait évident, paraît maintenant douteux. Nous avons cependant donné quelques pistes possibles et remis Pécuchard sur le droit chemin, nous lui souhaitons maintenant bonne route.

Références bibliographiques

BÉZIAU J.-Y. (1996). *Sur la vérité logique*. Thèse de Doctorat. Université de São Paulo, Département de Philosophie.

BLANCHÉ R. (1966). *Structures intellectuelles. Essai sur l'organisation systématique des concepts.* Paris: Vrin.

FRAÏSSÉ R. (1982). La zérologie, une recherche aux frontières de la logique et de l'art: application à la logique des relations de base vide. *International Logic Review* 26. 67-79.

HODGES W. (1985). Truth in a structure. *Proceedings of the Aristotelian Society* 86. 135-151.

HODGES W. (1986). Elementary predicate logic. In *Handbook of Philosophical Logic* vol. 1. Dordrecht: Kluwer. 135-151.

LARGEAULT J. (1993). *La logique*. Paris: PUF. Coll. Que sais-je?

MONJALLON A. (1963). *Introduction aux mathématiques modernes*. Paris: Vuibert.

QUENEAU R. (1950). Quelques remarques sommaires relatives aux propriétés aérodynamiques de l'addition. Dans *Contes et propos*. Paris: Gallimard. 1981. 185-188.

ROBINSON A. (1950). On the application of symbolic logic to algebra. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* vol.1. Cambridge Massachusetts. 686-694.

TARSKI A. (1936). Der Warheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica* I. 261-405. Trad. fr. dans *Logique, sémantique, métamathématique* t. 1. Paris: A. Colin. 1972. 157-269.

TARSKI A. (1969). What are logical notions? *History and Philosophy of Logic* 7. 143-154.

TARSKI A, LINDENBAUM A. (1927). Sur l'indépendance des notions primitives dans les systèmes mathématiques. *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques* V. 111-113.

VILKO R. (2002). *A hundred years of logical investigations – Reform efforts of logic in Germany 1781-1879*. Paderborn: Mentis.