

Expérience n°9 – PENDULES MECANIQUES

Domaine: Mécanique

Lien avec le cours de Physique Générale:

Cette expérience est liée aux chapitres suivants du cours de Physique Générale:

- Physique I, Chapitre 3: Dynamique : Newton, force et action
- Physique I, Chapitre 6: Mouvement circulaire et gravitation
- Physique I, Chapitre 7: Mouvement harmonique et résonance

Objectif général de l'expérience

L'objectif de cette expérience est d'**étudier le mouvement oscillatoire d'un pendule mécanique**. Dans un premier temps, la **période d'oscillation** d'un pendule sera mesurée pour différentes amplitudes du mouvement afin de mettre en évidence le **défaut d'isochronisme** du pendule.

Dans un deuxième temps, la mesure de la période d'oscillation en fonction de la longueur du pendule sera utilisée pour **déterminer l'accélération de la pesanteur g** .

1 Introduction**1.1) Définition et contexte historique**

En physique, un pendule est un **corps solide pouvant osciller autour d'un point ou d'un axe fixe** et qui, écarté de sa position d'équilibre, y retourne en oscillant sous l'effet d'une force, par exemple la gravité. Le mot pendule donné par Huygens (1629-1695) vient du latin *pendere*, qui signifie "pendre".

Un pendule est animé d'un **mouvement périodique** caractérisé par son **amplitude** A (écartement maximal par rapport à la position d'équilibre) et par sa **période** T (durée d'un cycle d'oscillation). La **fréquence** d'oscillation ν correspond à l'inverse de la période ($\nu = 1/T$). La **fréquence angulaire** ou **pulsation** ω est donnée par $\omega = 2\pi\nu$. Généralement, la période d'un pendule dépend de l'amplitude de son mouvement. Lorsque la période d'oscillation est indépendante de l'amplitude, on parle d'**isochronisme**.

Il existe de nombreux types de pendules différents, chacun ayant un intérêt particulier. Ils ont été ou sont utilisés dans le cadre d'expériences ayant pour objectif de mettre en évidence un phénomène physique (par exemple l'isochronisme) ou encore à des fins métrologiques. Ainsi les pendules furent les premiers gravimètres, c'est-à-dire, les premiers systèmes physiques capables de mesurer l'accélération due à la pesanteur g (1659). Ils servirent aussi à la mesure du temps et furent à l'origine des premières horloges modernes. Il existe aussi certains pendules célèbres comme le pendule de Foucault (1851), qui permit de mettre en évidence la rotation quotidienne de la Terre.

Tous les pendules sont soumis aux **lois de la mécanique**. Il faut cependant distinguer le **pendule simple** (ou mathématique), qui est une représentation idéale du pendule le plus simple possible, et le **pendule physique** qui est une représentation plus réelle. Un pendule simple est **constitué d'une masse ponctuelle** fixée à l'extrémité d'un **fil inextensible ou d'une tige rigide**, tous deux de **masse nulle**. Au contraire, le **pendule physique tient compte de la répartition spatiale de la masse du corps suspendu**. Pour cette raison, les lois physiques utilisées pour la description de leur mouvement sont différentes, mais on verra qu'elles mènent à des expressions très similaires.

La nature ponctuelle du pendule simple permet de décrire son mouvement par la 2^{ème} loi de Newton de la dynamique. Pour le pendule physique, le volume fini occupé par la masse, qui est caractérisé par le **moment d'inertie** du corps par rapport à son centre de masse, nécessite de traiter le problème par l'intermédiaire du **moment cinétique** du système qui décrit le mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe.

Dans cette expérience, les mesures se feront dans un premier temps sur un petit pendule suspendu par une tige rigide, qu'on assimilera à un pendule simple, puis sur un pendule physique que l'on nomme le grand pendule, composé d'une sphère suspendue à un fil (dont on ne prendra pas en compte la masse). Ce pendule physique sera utilisé pour déterminer l'accélération de la pesanteur g .

2 Principe général de l'expérience

2.1) Equations du mouvement d'un pendule

Les équations du mouvement du pendule simple et du pendule physique ont la même forme, la seule différence étant le moment d'inertie I_0 par rapport au point de rotation O qui intervient dans le cas du pendule physique. Un calcul détaillé pour obtenir l'équation du mouvement et l'expression de la période d'oscillation d'un pendule simple, puis d'un pendule physique, est présenté dans l'Annexe 1. Les équations du mouvement ne peuvent généralement pas être résolues de manière analytique et la période des oscillations dépend de l'amplitude du mouvement. Cependant, une solution analytique peut être trouvée dans le cas où l'amplitude des oscillations est petite ($\theta \ll 1$, où θ représente l'angle de déviation du pendule par rapport à sa position d'équilibre, voir Figure 1). Dans ce cas, on peut faire l'approximation $\sin \theta \approx \theta$ et les équations générales du mouvement de l'annexe 1 deviennent:

$$\text{- Pendule simple : } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 ; \quad (\text{Eq. 1})$$

$$\text{- Pendule physique : } \ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I_0} \theta = 0 . \quad (\text{Eq. 2})$$

Les équations (Eq. 1) et (Eq. 2) sont du même type (oscillateur harmonique). La solution générale de ces équations s'écrit:

$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \alpha) . \quad (\text{Eq. 3})$$

A et α sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales. Par exemple, si on lâche le pendule sans vitesse initiale avec un angle de départ θ_0 , on obtient:

$$A = \theta_0 \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t) . \quad (\text{Eq. 4})$$

On obtient ainsi une oscillation harmonique sinusoïdale dont la période vaut $T = \frac{2\pi}{\omega}$, soit :

$$\text{- Pour un pendule simple : } \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} ; \quad (\text{Eq. 5})$$

$$\text{- Pour un pendule physique : } \omega^2 = \frac{Mgl}{I_0} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} , \quad (\text{Eq. 6})$$

où L est la longueur réduite du pendule physique (voir §2.1.1). On constate que la période des oscillations est indépendante de l'amplitude du mouvement. On parle alors d'**isochronisme**. Ceci n'est

valable que dans l'approximation des petits angles ($\sin\theta \approx \theta$) qui a été utilisée pour résoudre les équations générales du mouvement (Eq. 18) et (Eq. 22). Dans le cas général où le mouvement n'est pas limité à de petites amplitudes, la période d'oscillation dépend de l'amplitude du mouvement. C'est le **défaut d'isochronisme** qui sera étudié dans la première partie de ce TP. On peut montrer que la période $T(\theta)$ s'exprime alors comme une série

$$\frac{T(\theta_0)}{T_0} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} + \dots, \quad (\text{Eq. 7})$$

où T_0 est la période correspondant aux petites amplitudes donnée par (Eq. 5) ou (Eq. 6).

2.1.1 Longueur réduite du pendule physique

Les équations (Eq. 1) et (Eq. 2) sont de la même forme. On appelle **longueur réduite du pendule physique** la longueur L du pendule simple donnant lieu à la même équation du mouvement et donc à la même période:

$$\frac{I_0}{Mgl} = \frac{L}{g} \Rightarrow \boxed{L = \frac{I_0}{Ml}}. \quad (\text{Eq. 8})$$

2.2) Moment d'inertie du pendule physique utilisé dans cette expérience

2.2.1 Moment d'inertie et règle de Steiner

Les équations du mouvement du pendule physique font intervenir le **moment d'inertie du pendule**. Le moment d'inertie d'un solide caractérise la résistance de l'objet à être mis en rotation : plus le moment d'inertie d'un objet est important, plus la mise en rotation du solide va nécessiter l'application d'un moment de force important.

Le **moment d'inertie** d'un solide par rapport à un axe O est défini de la façon suivante:

$$I_0 = \sum_i m_i r_i^2 \quad (\text{Eq. 9})$$

Dans le cas d'objets avec des géométries simples, le moment d'inertie peut être calculé de façon relativement aisée **par rapport à un axe de rotation passant par leur centre de gravité G** (on note I_G ce moment d'inertie).

Dans cette expérience, nous nous intéressons au mouvement de rotation d'un solide (un pendule physique) autour d'un point fixe O qui, en général, ne correspond pas au centre de gravité du pendule : le moment d'inertie I_0 en question doit être évalué par rapport au centre de rotation du mouvement auquel on s'intéresse. On peut alors calculer ce moment d'inertie à partir de I_G en appliquant la **règle de Steiner** :

$$I_0 = I_G + ml^2, \quad (\text{Eq. 10})$$

l étant la distance qui sépare l'axe de rotation du centre de gravité de l'objet.

2.2.2 Sphère suspendue à un fil (Pendule 2)

Considérons le cas du pendule physique représenté sur la Figure 1 (correspond au grand pendule utilisé dans la deuxième partie du TP pour la détermination de g). Ce pendule est composé d'une sphère de rayon R suspendue à un fil de masse négligeable. Le moment d'inertie I_G de la sphère par rapport à un axe passant par son centre de gravité G est donné par:

$$I_G = \frac{2MR^2}{5} . \quad (\text{Eq. 11})$$

Le moment d'inertie I_O par rapport à l'axe de rotation passant par le point O s'obtient par la règle de Steiner à partir du moment d'inertie I_G par rapport au centre de masse:

$$I_O = I_G + MI^2 . \quad (\text{Eq. 12})$$

A partir des expressions (Eq. 8), (Eq. 11) et (Eq. 12), on en déduit la longueur réduite du pendule solide:

$$L = \left(\frac{2MR^2}{5} + MI^2 \right) \frac{1}{MI} = l + \frac{2R^2}{5l} \Rightarrow \boxed{L = l + \varepsilon ; \varepsilon = \frac{2R^2}{5l}} . \quad (\text{Eq. 13})$$

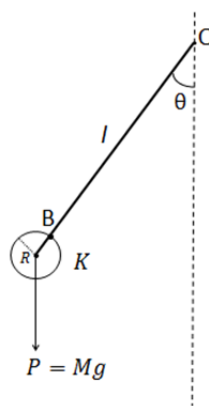


Figure 1: Schéma de principe du pendule utilisé pour la détermination de g (2^{ème} partie du TP).

3 Marche à suivre

L'expérience se déroule en deux parties distinctes utilisant chacune un pendule différent. Les mesures des périodes d'oscillation se font à l'aide d'un chronomètre. Afin d'améliorer la précision des mesures, il est demandé de mesurer dans chaque cas la durée de 20 cycles d'oscillation et d'en déduire la période.

Expliquer pourquoi la mesure de la période est plus précise ainsi (par rapport à la mesure directe d'une seule période).

Les mesures se font aussi sans vitesse initiale. La position de la masse doit donc être correctement choisie en fonction de l'angle souhaité et il suffira ensuite de lâcher celle-ci.

3.1) Défaut d'isochronisme

Dans cette première partie, l'objectif est de montrer le **défaut d'isochronisme du pendule**. Les mesures se feront avec le **petit pendule**.

On déterminera la période du pendule en fonction de l'amplitude pour des amplitudes θ_0 comprises entre 0 et 90°. Pour ce faire, mesurer trois fois successivement la durée de 20 oscillations et en déduire la valeur moyenne pour chaque amplitude.

Calcul d'erreur: Pour chaque amplitude, déterminer l'erreur statistique sur la période T à partir des résultats des trois mesures.

On pose T_0 la période pour une petite amplitude (ici on choisit $T_0 = T(5^\circ)$). Représenter sur un graphique les valeurs expérimentales de $T(\theta_0)/T(5^\circ)$ avec les barres d'incertitudes correspondantes. Tracer la courbe théorique $T(\theta_0)/T_0$ en fonction de θ_0 (Eq. 7) et comparer avec les valeurs expérimentales.

3.2) Détermination de g

Dans cette deuxième partie, l'objectif est de déterminer l'**accélération de la pesanteur g** . Les mesures se feront avec le **grand pendule** (sphère suspendue au fil). Dans toutes les mesures, on veillera à prendre des amplitudes suffisamment faibles pour pouvoir utiliser l'approximation des petits angles, $\sin\theta \approx \theta$.

Déterminer la longueur réduite L du grand pendule en mesurant la longueur $l = OB + R$ (voir Figure 1) et en ajoutant la correction ε donné par l'expression (Eq. 13). Utiliser un pied à coulisse pour mesurer le diamètre R de la sphère.

On fait varier la longueur l du fil entre 70 cm et 120 cm et on mesure pour chaque longueur la période T du pendule. Comme pour la partie 3.1), on chronomètre la durée de 20 oscillations et on répète trois fois la mesure pour chaque longueur.

Calcul d'erreur: estimer les incertitudes de mesures sur l et sur R et en déduire l'incertitude résultante sur L . Déterminer l'erreur statistique sur la période T à partir des résultats des trois mesures et calculer l'incertitude résultante sur T^2 .

Tracer la courbe $T^2 = f(L)$ avec les barres d'incertitudes et effectuer une régression linéaire. Déterminer la valeur de g à partir de la pente de la droite de régression.

Calcul d'erreur: déterminer l'incertitude obtenue sur la valeur de g à partir de l'incertitude obtenue sur la pente du graphique $T^2 = f(L)$.

Préalable: déterminer l'expression de l'incertitude sur g à partir de l'incertitude obtenue sur la pente du graphique $T^2 = f(L)$.

Comparer le résultat avec la valeur $g = 9.8065 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, valeur valable pour Neuchâtel.

4 Annexes

Annexe 1: Equations du mouvement des pendules simple et physique

Nous présentons dans cette annexe le calcul des équations du mouvement pour le cas du pendule simple (§4.1) et du pendule physique (§4.2).

4.1) Le pendule simple

4.1.1 Rappel de mécanique : 2^{ème} loi de Newton

La deuxième loi de Newton permet d'exprimer l'accélération \vec{a} produite par un ensemble de forces \vec{F}_i sur un objet de masse m comme:

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_i \vec{F}_i. \quad (\text{Eq. 14})$$

L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, elle-même dérivée temporelle du vecteur déplacement \vec{r} ($\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$), l'équation du mouvement d'un corps est donnée par:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (\text{Eq. 15})$$

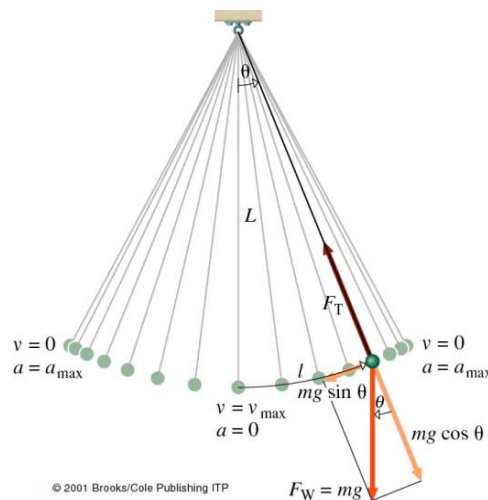


Figure 2: Forces s'exerçant sur un pendule simple et mouvement du pendule.

Dans un pendule simple, la masse ponctuelle m est soumise à deux forces: son poids $m\vec{g}$ et la tension \vec{F}_T du fil de longueur l (voir Figure 2). En décomposant ces forces en des composantes radiales et tangentielles, la 2^{ème} loi de Newton donne:

$$mg \cos \theta = F_T \quad (\text{Eq. 16})$$

$$mg \sin \theta = -ma_t \quad (\text{Eq. 17})$$

où θ est l'angle entre la verticale et le pendule (voir Figure 2) et a_t est l'accélération tangentielle subie par la masse m : $a_t = l \frac{d^2\theta}{dt^2} = l\ddot{\theta}$, et $\ddot{\theta}$ est son accélération angulaire. L'équation du mouvement devient ainsi :

$$mg \sin \theta = -ml\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 . \quad (\text{Eq. 18})$$

On observe que cette équation est indépendante de la masse m du corps suspendu, de sorte que le **mouvement du pendule simple** (mathématique), en particulier sa période d'oscillation, **ne dépend pas de sa masse mais uniquement de sa longueur l** . L'explication fut donnée par Galilée lorsqu'il découvrit cet effet en 1581: le fil ne fait que maintenir la masse sur une trajectoire circulaire, sinon elle tomberait en chute libre. Comme tous les objets tombent à la même vitesse sous l'effet de la gravité, il est normal que deux pendules de même longueur mais de masse différente oscillent à la même fréquence. Cette propriété sera utilisée dans la deuxième partie de ce TP pour déterminer l'accélération de la pesanteur g .

4.2) Le pendule physique

4.2.1 Rappel de mécanique: solide rigide en rotation

Pour un solide rigide possédant un point fixe O , on définit le moment \vec{M}_O (par rapport au point O) d'une force extérieure \vec{F} appliquée en un point A comme étant le produit vectoriel de la force \vec{F} et du vecteur $\vec{r} = OA$ (aussi appelé le vecteur support) comme schématisé sur la Figure 3:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} . \quad (\text{Eq. 19})$$

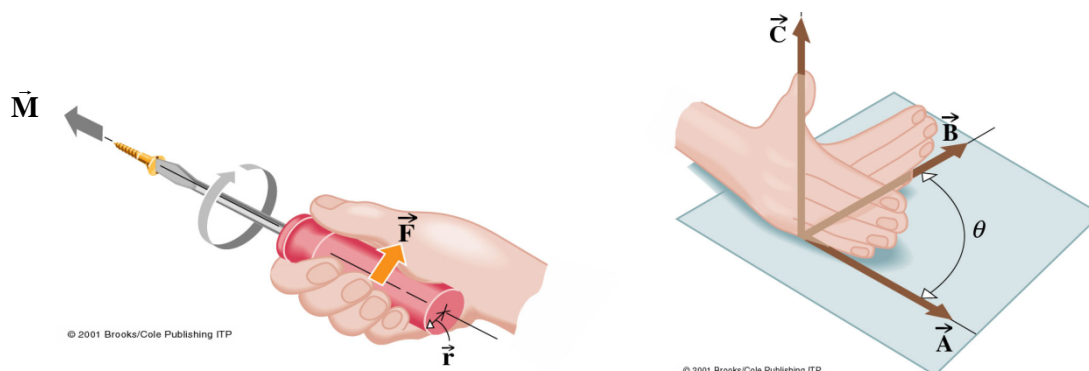


Figure 3: (a) Moment de force appliqué par une main sur un tournevis. (b) Règle de la main droite pour le produit vectoriel.

Le **moment de force** décrit la **capacité à produire une rotation**. Il constitue l'équivalent rotationnel de la force. Le moment de force \vec{M}_O engendre une rotation du corps et induit donc un changement de son **moment cinétique** $\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$, où $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement. Pour un corps solide en rotation autour d'un axe passant par le point O , le moment cinétique \vec{L}_O s'écrit:

$$\vec{L}_O = I_O \vec{\omega} , \quad (\text{Eq. 20})$$

où $I_O = \sum_i m_i r_i^2$ est le **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe de rotation et $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation (voir Figure 4).

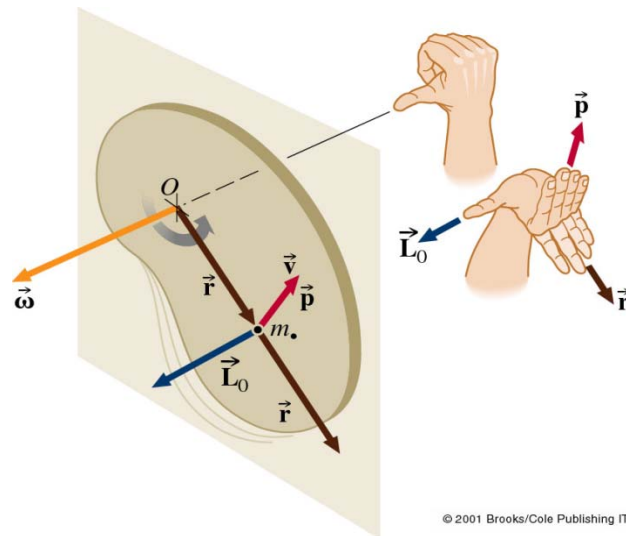


Figure 4: Solide en rotation autour d'un axe passant par le point O. $\vec{\omega}$ est la vitesse angulaire de rotation du corps et \vec{L}_O son moment cinétique par rapport au point O.

Comme pour le pendule simple (voir §4.1), seules deux forces agissent sur un pendule physique de masse M : son poids $M\vec{g}$ et la force de tension du fil \vec{F}_T . Seul le poids a un moment de force non nul. Le moment de la force de tension du fil est nul, car cette force est toujours perpendiculaire au vecteur déplacement.

Le **théorème du moment cinétique** montre que la variation du moment cinétique est égale à la somme des moments des forces extérieures:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O} \quad (\text{Eq. 21})$$

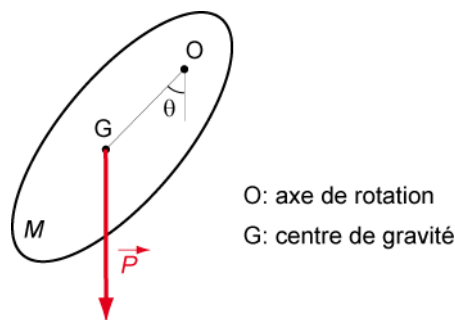


Figure 5: Représentation schématique d'un pendule physique oscillant autour d'un axe passant par le point O.

En appliquant le théorème du moment cinétique (Eq. 21) au cas du pendule physique (Figure 5) et en tenant compte de l'expression (Eq. 20) et du fait que $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$, l'équation du mouvement du pendule physique est obtenue :

$$\frac{dL_O}{dt} = \frac{d}{dt}(I_O \omega) = I_O \frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = I_O \ddot{\theta} = M_O = -Mgl \sin \theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Mgl}{I_O} \sin \theta = 0} \quad (\text{Eq. 22})$$

On constate que les équations du mouvement du pendule simple (Eq. 18) et du pendule physique (Eq. 22) ont une forme semblable. Mais contrairement au pendule simple pour lequel l'équation du mouvement est indépendante de la masse m , la masse M et sa répartition spatiale qui intervient dans le moment d'inertie I_O jouent un rôle dans le mouvement du pendule physique.

Travaux Pratiques de Physique

Expérience N°9 : Pendules mécaniques

3.1) Défaut d'isochronisme

Incertitude sur les angles mesurés: [°]

θ_0 [°]	Mesure 1		Mesure 2		Mesure 3		T [s]	σ_T [s]	T/T_0	$\Delta(T/T_0)$	$(T/T_0)_{\text{théo}}$
	$20 \cdot T_1$ [s]	T_1 [s]	$20 \cdot T_2$ [s]	T_2 [s]	$20 \cdot T_3$ [s]	T_3 [s]					

Représentation graphique : $T/T_0 = [T/T_0](\theta_0)$

insérer graphique ici

Travaux Pratiques de Physique

Expérience N°9 : Pendules mécaniques

3.2) Détermination de g

Rayon de la sphère:

$R =$ [cm]

Incertitude sur le rayon de la sphère:

[cm]

Incertitude sur les longueurs mesurées:

[cm]

l [cm]	ε [cm]	L [cm]	ΔL [cm]	Mesure 1		Mesure 2		Mesure 3		T [s]	σ_T [s]	T^2 [s ²]	ΔT^2 [s ²]
				$20 \cdot T_1$ [s]	T_1 [s]	$20 \cdot T_2$ [s]	T_2 [s]	$20 \cdot T_3$ [s]	T_3 [s]				
<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>
<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>
<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>
<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>
<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>	<input style="width: 50px;" type="text"/>

Représentation graphique : $T^2 = T^2(L)$

insérer graphique ici

Valeur de référence:	$g =$ <input style="width: 100px;" type="text"/>	[m/s ²]
Valeur expérimentale:	$g =$ <input style="width: 100px;" type="text"/>	± <input style="width: 50px;" type="text"/> [m/s ²]