Rallye mathématique de Neuchâtel

Solutions de l'Etape 3

Problème 1

Gaetano a deux horloges murales et observe qu'elles indiquent simultanément 16h. Il sait que leurs mouvements sont parfaitement réguliers. Cependant, le mouvement de la première est trop rapide de 1 %, tandis que le mouvement de la seconde est trop lent de 5 %. Après combien de temps les deux horloges de Gaetano indiqueront-elles pour la première fois la même heure ?

Solution. Gaetano, qui aime les horloges, décide de construire une 3ème horloge qui mesurera l'avance de la 1ère horloge par rapport à la 2ème. Comme la 1ère horloge avance de 1 % par rapport au temps réel, et que la 2ème retarde de 5 % par rapport au temps réel, la 3ème horloge indique 6 % du temps réel. Et les deux premières horloges indiqueront pour la première fois la même heure, exactement quand la 3ème horloge indiquera pour la première fois 12h. Comme la 3ème horloge indique 6 % du temps réel, cela se passera après $(12 \times 100)/6 = 200$ heures. On peut vérifier que les deux premières horloges indiqueront 2h à ce moment.

Solution correcte : P. Bidet (merci pour l'idée de la 3ème horloge), J. Cordova, T. Letourmy, M. Mathey, F. Spicher, L. Tschanz. $\square$

Problème 2

Soient $a_1, \ldots, a_n$ les longueurs des côtés d'un polygône, et P le périmètre de ce polygône. Montrer que

$$\frac{a_1}{P-a_1} + \frac{a_2}{P-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{P-a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Solution. Écrivons $p_i := \frac{a_i}{P}$. Faisons deux observations avant de commencer : la fonction $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est convexe, donc on pourra appliquer l'inégalité de Jensen.

Théorème 1 (*inégalité de Jensen*)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. Alors pour tous $a_1, \ldots, a_n \in I$ et pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right).$$

On appliquera cette inégalité en prenant $\lambda_i = p_i$ et $a_i = p_i$, ce qui nous donnera

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_i} = \sum_{i=1}^{n} p_i f(p_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right) = \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{n} p_i^2}. \tag{1}$$

De plus, on a

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot 1\right)^2}_{=1} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1^2}_{=n} \implies \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \geq \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Alors en utilisant successivement (1) puis (2), on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{P-a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{1-p_i} \geq \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{n} p_i^2} \geq \frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{n}{n-1}.$$

Remarquons encore que cette borne est atteinte lorsque $a_i = \frac{P}{n}$, i.e. les côtés du polygône ont tous la même longueur.

Solution correcte : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, M. Mathey, L. Tschanz. □

PROBLÈME 3

Soit $(z_n)_{n\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Montrer qu'il existe un unique entier $N \geq 1$ tel que :

$$z_N < \frac{z_0 + \ldots + z_N}{N} \leq z_{N+1}.$$

SOLUTION. On définit la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ par :

$$d_n = (z_0 + \ldots + z_n) - n z_n.$$

On constate que la première inégalité de l'énoncé est vérifée si et seulement si $d_n > 0$. De plus on a :

$$n z_{n+1} - (z_0 + \ldots + z_n) = (n+1) z_{n+1} - (z_0 + \ldots + z_{n+1}) = -d_{n+1}.$$

Ainsi la seconde inégalité est équivalente à $d_{n+1} \leq 0$. Il suffit donc de montrer qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $d_n > 0 \geq d_{n+1}$. On remarque premièrement que $d_1 = z_0 > 0$ par hypothèse. De plus la suite (d_n) est strictement décroissante. En effet, on a :

$$d_{n+1} - d_n = n(z_n - z_{n+1}) < 0,$$

où l'on utilise l'hypothèse que la suite (z_n) est strictement croissante.
Comme (d_n) est une suite entière strictement décroissante avec $d_1 > 0$, elle doit donc franchir 0. Ce qui conclut la preuve.

Solutions correctes : P. Bidet, J. Cordova, T. Letourmy, F. Péniat. □

L'équipe "rallye" vous souhaite de Joyeuses Fêtes et se réjouit de vous retrouver en février, à la rentrée du semestre de printemps 2020 !