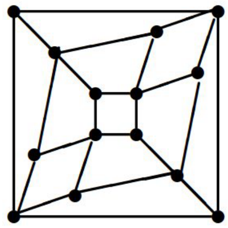
Rallye mathématique de Neuchâtel

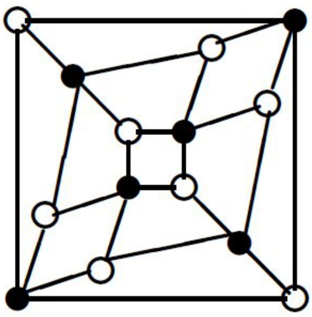
Solutions de l'étape 3

PROBLÈME 1

Le graphe en pièce jointe représente 14 villes et les routes entre ces villes. Est-il possible de trouver un chemin qui passe par chaque ville exactement une fois ?



SOLUTION. Non. Colorions les villes en deux couleurs de sorte que deux villes adjacentes soient en deux couleurs différentes comme sur l'image ci-dessous.



Alors un chemin qui parcourrait les 14 villes alternerait noir-blanc-noir-blanc... ou blanc-noir-blanc... Il passerait donc par 7 villes blanches et 7 villes noires or il y a 6 villes noires et 8 villes blanches et donc il n'existe pas de chemin qui traverse chaque ville une et une seule fois.

Solutions correctes : Jérémie PIERRE, Francois SIGRIST, Hugues VERMEIREN

□

Problème 2

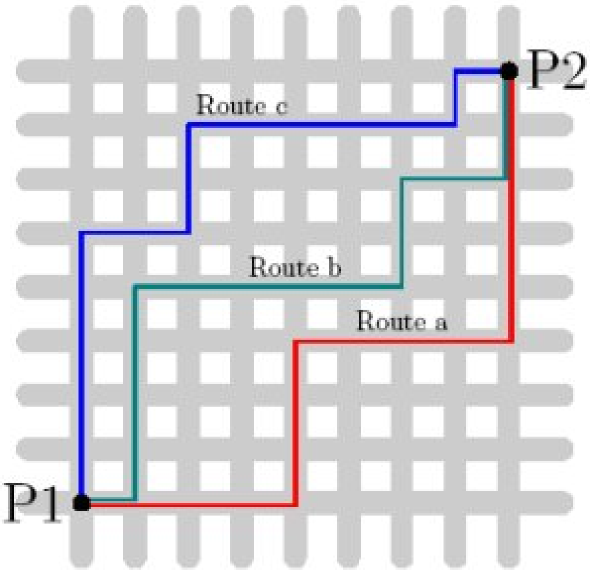
Pour $n \geq 2$, on donne $a_1, ..., a_n$ des entiers pas nécessairement différents. Montrer qu'il existe toujours un sous-ensemble non vide dont la somme est divisible par n.

SOLUTION. Considérons les n sommes $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Il y a n possibilités pour le reste de la division par n. Si un des restes des s_i divisé par n est égal à 0, nous avons un sous-ensemble dont la somme est divisible par n. Sinon, par le principe des tiroirs, nous avons au moins deux indices $i < j$ tel que $s_i \equiv s_j \mod n$. Alors la somme $s_{i+1} + ... + s_j$ est divisible par n.

Solutions correctes : Pierre Masai. □

Problème 3

Dans Mathville, au plan en damier, Alice habite en $P1$ et Bob habite en $P2$.



Ils décident de marcher l'un vers l'autre, Alice se dirigeant vers le Nord-Est, Bob vers le Sud-Ouest. Mais ils ont oublié qu'il y a plusieurs routes de même longueur allant de $P1$ à $P2$ (trois de ces routes sont illustrées sur le schéma ci-dessus), et ils ne se sont pas concertés sur leur itinéraire ! Quelle est la probabilité qu'Alice et Bob se rencontrent à mi-chemin ?

SOLUTION. Mettons des coordonnées de sorte que $P1 = (0, 0)$ et $P2 = (8, 8)$. Si Alice et Bob se rencontrent, nécessairement chacun aura marché 8 unités et la rencontre aura lieu en un des 9 points $a_0 = (0, 8), a_1 = (1, 7), ...a_7 = (7, 1), a_8 = (8, 0)$ de la diagonale. Notons $(A = a_k)$ l'événement : *"Alice arrive en a_k après avoir marché 8 unités"*. L'événement $(B = a_k)$ se définit de manière analogue. Notons que, par symétrie, $(A = a_k)$ et $(B = a_k)$ ont la même probabilité. En utilisant l'indépendance, la probabilité demandée est donc :

$$\sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}[(A = a_k) \cap (B = a_k)] = \sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(A = a_k) \cdot \mathbb{P}(B = a_k) = \sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(A = a_k)^2.$$

Puisqu'en chaque carrefour il y a 2 choix de directions possibles, Alice a 2^8 chemins possibles. De plus pour arriver en a_k en 8 unités, elle doit marcher exactement k fois vers l'Est et $8-k$ fois vers le Nord. La probabilité de $(A = a_k)$ est donc $\frac{C_8^k}{2^8}$ où C_n^k désigne le coefficient binomial. La probabilité cherchée est donc $\sum_{k=1}^{8} \frac{(C_8^k)^2}{2^{16}}$.

On peut soit calculer cette somme directement soit faire appel à l'identité $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$ (exercice : la démontrer !) : la probabilité cherchée est finalement $\frac{C_{16}^8}{2^{16}} \simeq 0.1964$.

Solutions correctes : Jérémie PIERRE (Lycée DDR), François SIGRIST (Crans-Montana), Pierre MASAI (Nagoya) □

Toute l'équipe vous souhaite de très Joyeuses Fêtes de fin d'année et espère vous retrouver en pleine forme à la rentrée de février 2022 !

L'équipe "rallye" : Laura GRAVE DE PERALTA, Laurent HAYEZ, Elisa LORENZO GARCÍA, Leonard TSCHANZ, Alain VALETTE, Alexandre ZUMBRUNNEN.