NOUVELLES APPROCHES DE LA PROPRIETE (T) DE KAZHDAN

par **Alain VALETTE**

Introduction

La propriété (T) pour un groupe localement compact G est une forme de rigidité de G en théorie des représentations : il est impossible de déformer la représentation triviale de dimension 1 de G parmi les représentations unitaires de G. Elle a été dégagée en 1967 par D. Kazhdan [34], qui s'intéressait à des variétés riemanniennes M localement symétriques, irréductibles, de rang au moins 2, de volume fini. En d'autres termes, $M = \Gamma\backslash G/K$, où G est un groupe de Lie simple à centre fini, de rang réel ≥ 2, K est un sous-groupe compact maximal de G, et Γ est un réseau sans torsion de G. Les principaux résultats de l'article de Kazhdan sont les suivants :

- Le groupe fondamental $\Gamma = \pi_1(M)$ est de type fini (quand M n'est pas compact, ce résultat est loin d'être trivial !).
- Le premier nombre de Betti $b_1(M) = \dim_{\mathbb{R}} Hom(\Gamma, \mathbb{R})$ est nul.

Le principal mérite de Kazhdan est d'avoir vu que ces deux propriétés de M dépendent en fait de la structure des représentations unitaires du groupe de Lie G ambiant (voir les Théorèmes 1 et 2 ci-dessous pour les énoncés précis).

La propriété (T) a trouvé une série d'applications, qui vont de la théorie des graphes à la théorie ergodique (voir [14]). J'en isolerai une seule : le théorème de Margulis sur les sous-groupes normaux des réseaux Γ en rang ≥ 2 (voir [37], Theorem 4.9) : un sous-groupe normal $N \triangleleft \Gamma$ est soit central dans G (et donc fini), soit d'indice fini dans Γ. Pour cela, on montre que, si N est infini, alors Γ/N est moyennable. Or Γ/N a aussi la propriété (T) (car Γ l'a), et un groupe dénombrable qui est moyennable et a la propriété (T), est nécessairement fini [1]. A ma connaissance, toutes les preuves connues de

[1] Pour la preuve, voir l'Exemple 1 de la section 1. Il est important que la preuve ne puisse pas être effective, puisque Γ est résiduellement fini, donc admet des quotients finis

ce résultat passent par la propriété (T).

Le texte se présente comme suit : après un résumé de l'article original de Kazhdan [34] au chapitre 1, nous introduisons au chapitre 2 la caractérisation cohomologique de la propriété (T). Les résultats récents mentionnés dans ce texte sont quasiment tous des conséquences de la caractérisation cohomologique : actions par difféomorphismes du cercle (section 2.4 et Théorème 5), caractérisation de la propriété (T) par l'annulation de la 1-cohomologie *réduite* (section 3.1), lien avec les applications harmoniques et preuve de la propriété (T) pour $Sp(n,1)$ (section 3.2), non-invariance de la propriété (T) par quasi-isométries (section 3.3), critère spectral pour la propriété (T) (chapitre 4).

La propriété (T) de Kazhdan a été exposée chez Bourbaki dans l'exposé 343 de Delaroche-Kirillov [15], et partiellement dans l'exposé 778 de Pansu [40]. Les progrès depuis 1993 ont été tels que j'ai dû me livrer à des choix : faute de temps ou faute de goût, j'ai choisi de ne pas parler du lien entre propriété (T) et génération bornée (Shalom [48]), de l'invariance par équivalence mesurée de la propriété (T) (Furman [20]), de l'industrie des constantes de Kazhdan (voir les références chez Gelander-Zuk [22]), ou des groupes aléatoires (Gromov [25], Zuk [54]) - ce dernier aspect devrait faire l'objet d'un prochain Séminaire Bourbaki par E. Ghys.

1 Définitions et exemples de base

Soient G un groupe localement compact, et π une représentation unitaire, fortement continue, de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$.

Définition 1 *La représentation π possède* **presque des vecteurs invariants** *si, pour tout $\epsilon > 0$ et toute partie compacte $K \subset G$, il existe un vecteur $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ tel que*

$$\max_{g\in K} \|\pi(g)\xi - \xi\| \ < \ \epsilon\|\xi\|.$$

Exemple 1

1) Soit G un groupe compact. Toute représentation π de G qui possède presque des vecteurs invariants, possède des vecteurs invariants non

arbitrairement grands.

nuls. En effet, soit ξ un vecteur-unité de $\mathcal{H}_\pi$ tel que

$$\max_{g\in G} \|\pi(g)\xi - \xi\| \ < \ 1.$$

Posons $\eta = \int_G \pi(g)\xi \, dg$, où dg désigne la mesure de Haar normalisée sur G. Le vecteur η est clairement invariant. Pour montrer qu'il est non nul, on remarque que $\|\eta - \xi\| \ = \ \| \int_G (\pi(g)\xi - \xi) dg\| \ < \ 1$. Comme $\|\xi\| = 1$, on a $\eta \neq 0$.

2) Notons λ_G la représentation régulière gauche du groupe localement compact G sur l'espace de Hilbert $L^2(G)$. D'une part, on observe que λ_G a des vecteurs invariants non nuls si et seulement si G est compact. D'autre part, c'est un résultat classique de Hulanicki [32] et Reiter [44] que λ_G a presque des vecteurs invariants si et seulement si G est moyennable. Donc, si G est moyennable non compact (par exemple $G = \mathbb{Z}$), la représentation λ_G fournit un exemple de représentation ayant presque des vecteurs invariants, mais sans vecteur invariant non nul.

Définition 2 *Un groupe localement compact G a* **la propriété (T)**, *ou est* **un groupe de Kazhdan**, *si toute représentation de G qui possède presque des vecteurs invariants, possède des vecteurs invariants non nuls.*

L'Exemple 1 montre d'une part que les groupes compacts ont trivialement la propriété (T), d'autre part que les groupes moyennables non compacts n'ont pas la propriété (T) (ceci a été évoqué dans l'Introduction).

Les principales propriétés structurelles des groupes de Kazhdan sont rassemblées dans le résultat suivant, dû à Kazhdan [34] (voir aussi [15], [14]).

Théorème 1 *Soit G un groupe de Kazhdan.*

i) G est compactement engendré.

ii) Le quotient $G/\overline{[G,G]}$ de Gpar l'adhérence du sous-groupe des commutateurs est compact.

iii) Si H est un sous-groupe fermé de co-volume fini dans G, alors H est un groupe de Kazhdan.

En particulier, soit Γ un *réseau* dans G, c-à-d. un sous-groupe discret de co-volume fini dans G. Si G a la propriété (T), le Théorème 1 implique que Γ, ainsi que tous ses sous-groupes d'indice fini, sont finiment engendrés avec un abélianisé fini.

Exemple 2

Voyons comment cette remarque peut être exploitée pour montrer que certains groupes classiques n'ont *pas* la propriété (T). D'abord, le groupe libre $\mathbb{F}_n$ sur n générateurs ($n \geq 1$) n'a pas la propriété (T) car son abélianisé est infini. Ensuite, $SL_2(\mathbb{Z})$ n'a pas la propriété (T) car il contient un sous-groupe libre d'indice fini (noter que l'abélianisé de $SL_2(\mathbb{Z})$ est fini !). Enfin, $SL_2(\mathbb{R})$ n'a pas la propriété (T) car il contient $SL_2(\mathbb{Z})$ comme réseau.

Les principaux exemples de groupes de Kazhdan sont donnés par le résultat suivant, dû à Kazhdan [34] en rang ≥ 3, et complété en rang 2 par Delaroche-Kirillov [15], Vaserstein [50], et Wang [52]. Un *corps local* est un corps commutatif localement compact non discret (penser à $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$ et aux corps de séries de Laurent sur les corps finis).

Théorème 2 *Soit $\mathbb{K}$ un corps local. Soit $\mathbb{G}$ un groupe algébrique connexe, presque simple sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} - rang(\mathbb{G}) \geq 2$. Le groupe $G = \mathbb{G}(\mathbb{K})$ des $\mathbb{K}$-points de $\mathbb{G}$ possède la propriété (T).*

Exemple 3

1) Les groupes $SL_n(\mathbb{K})\,(n \geq 3)$ et $Sp_{2n}(\mathbb{K})\,(n \geq 2)$, ont la propriété (T).
2) Les groupes discrets $SL_n(\mathbb{Z})\,(n \geq 3)$ et $Sp_{2n}(\mathbb{Z})\,(n \geq 2)$, qui sont des réseaux respectivement dans $SL_n(\mathbb{R})$ et $Sp_{2n}(\mathbb{R})$, ont la propriété (T).

Les Théorèmes 1 et 2 impliquent les propriétés des variétés riemanniennes localement symétriques qui ont été mentionnées dans l'Introduction.

Le cas des groupes de rang 1 réserve une surprise : la situation n'est pas la même selon que le corps $\mathbb{K}$ est archimédien ou pas. Nous verrons au Corollaire 1 que toute action d'un groupe de Kazhdan sur un arbre possède un sommet fixe ou une arête fixe. Or, si $\mathbb{K}$ est un corps local non archimédien et $\mathbb{G}$ un $\mathbb{K}$-groupe algébrique connexe, presque simple avec $\mathbb{K} - rang(G) = 1$, le groupe $\mathbb{G}(\mathbb{K})$ agit proprement sur un arbre (à savoir son immeuble de Bruhat-Tits, voir [7]). Donc $\mathbb{G}(\mathbb{K})$ n'a pas la propriété (T).

Considérons maintenant le cas archimédien. D'après la classification de Cartan (voir [31]), les groupes de Lie simples, connexes, de rang réel 1 sont localement isomorphes soit à $SO(n,1)$, soit à $SU(n,1)$, soit à $Sp(n,1)$ (avec chaque fois $n \geq 2$), soit enfin à $F_{4(-20)}$. Géométriquement, on réalise ces groupes comme groupes d'isométries des espaces hyperboliques de dimension

n respectivement sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$, sur l'algèbre $\mathbb{H}$ des quaternions de Hamilton, ou sur l'algèbre Cay des octaves de Cayley (avec $n = 2$ dans ce dernier cas). Le résultat suivant est dû à Kostant [35]. Nous esquisserons une preuve de la seconde moitié à la section 3.2.

Théorème 3 *Soit G un groupe de Lie simple, connexe, de rang réel 1.*

i) Si G est localement isomorphe à $SO(n, 1)$ ou à $SU(n, 1)$ $(n \geq 2)$, alors G n'a pas la propriété (T).

ii) Si G est localement isomorphe à $Sp(n, 1)$ $(n \geq 2)$ ou à $F_{4(-20)}$, alors G a la propriété (T).

Le groupe $Sp(n, 1)$ et ses réseaux exhibent un curieux mélange de rigidité et de non-rigidité. Certains caractères les rapprochent des groupes de rang supérieur (propriété (T), super-rigidité, voir [12], [27]). D'autres attributs les rattachent au rang 1 (hyperbolicité des réseaux co-compacts [26], non-isolement de la représentation triviale parmi les représentations uniformément bornées, voir [13]).

Ces propriétés antagonistes ont été exploitées : construction d'une infinité non dénombrable de groupes de torsion non moyennables, par Gromov [26] ; construction de C^*-algèbres non équivalentes en K-théorie à des algèbres nucléaires, par Skandalis [49].

2 1-cohomologie et actions affines

2.1 Définitions

Soit π une représentation unitaire du groupe localement compact G.

Définition 3 *a) L'espace des* **1-cocycles** *à valeurs dans π est*

$$Z^1(G, \pi) = \{b : G \to \mathcal{H}_\pi : \ b \text{ continu}, b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g) \forall g, h \in G\}.$$

b) L'espace des **1-cobords** *à valeurs dans π est*

$$B^1(G, \pi) = \{b \in Z^1(G, \pi) : \exists \xi \in \mathcal{H}_\pi : \ b(g) = \pi(g)\xi - \xi, \forall g \in G\}.$$

c) Le groupe de **1-cohomologie** *à coefficients dans π est le quotient*

$$H^1(G, \pi) = Z^1(G, \pi)/B^1(G, \pi).$$

d) *Munissons $Z^1(G,\pi)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Le groupe de* **1-cohomologie réduite** *à coefficients dans π est le quotient*

$$\overline{H^1}(G,\pi) \;=\; Z^1(G,\pi)/\overline{B^1(G,\pi)},$$

où $\overline{B^1(G,\pi)}$ désigne la fermeture de $B^1(G,\pi)$.

Ces notions s'interprètent en termes d'actions isométriques affines de G sur $\mathcal{H}_\pi$.

- Si $b : G \to \mathcal{H}_\pi$ est une application continue, associons à $b(g)$ l'isométrie affine de $\mathcal{H}_\pi$:

$$\alpha(g)v \;=\; \pi(g)v + b(g) \;\; (v \in \mathcal{H}_\pi).$$

  L'application b est un 1-cocycle si et seulement si $\alpha(gh) = \alpha(g)\alpha(h)$ pour tous $g, h \in G$, c'est-à-dire si α est une action isométrique affine de G, de partie linéaire π.

- Le 1-cocycle b est un 1-cobord si et seulement si l'action affine α possède un point fixe, c'est-à-dire si α est conjuguée à π par une translation. Le *lemme du centre* (voir [14]) dit qu'un cocycle b est un cobord si et seulement si b est borné comme fonction sur G.

- $H^1(G,\pi) = 0$ si et seulement si toute action isométrique affine de partie linéaire π possède un point fixe.

- $\overline{H^1}(G,\pi) = 0$ si et seulement si toute action isométrique affine de partie linéaire π possède presque des points fixes.

Les trois sections suivantes sont consacrées à des exemples où apparaissent naturellement des représentations ayant de la 1-cohomologie non nulle.

2.2 Représentations ayant presque des vecteurs invariants

Si π est une représentation unitaire de G, nous notons $\infty\pi$ la somme directe hilbertienne d'une infinité dénombrable de copies de π.

Proposition 1 *Soit G un groupe localement compact σ-compact. Soit π une représentation de G, possédant presque des vecteurs invariants, mais pas de vecteur invariant non nul. Alors $H^1(G,\infty\pi) \neq 0$.*

Preuve : Soit $(K_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de parties compactes, recouvrant G. Comme π possède presque des vecteurs invariants, on trouve une suite $(\xi)_{n\geq 1}$ de vecteurs de norme 1 dans $\mathcal{H}_\pi$ tels que

$$\max_{g\in K_n} \|\pi(g)\xi_n - \xi\| \; < \; 2^{-n}$$

pour tout $n \geq 1$. On pose alors, pour $g \in G$:

$$b(g) \; = \; \bigoplus_{n=1}^{\infty} n(\pi(g)\xi_n - \xi_n).$$

Cette somme converge dans $\mathcal{H}_\pi \oplus \mathcal{H}_\pi \oplus \ldots$, uniformément sur tout compact de G. On a donc $b \in Z^1(G, \infty\pi)$. Pour montrer que b n'est pas un cobord, montrons que b n'est pas borné sur G. Si b était borné par une constante R, on aurait pour tout $n \geq 1$ et tout $g \in G$:

$$n\|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \; \leq \; R.$$

Prenons n assez grand pour avoir, pour tout $g \in G$:

$$\|\pi(g)\xi_n - \xi_n\| \; \leq \; 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \; \leq \; Re\langle \pi(g)\xi_n | \xi_n \rangle.$$

Notons alors C l'enveloppe convexe fermée de $\pi(G)\xi_n$ dans $\mathcal{H}_\pi$: elle est invariante par $\pi(G)$, et pour tout $\eta \in C$ on a $\frac{1}{2} \leq Re\langle \eta | \xi_n \rangle$. L'unique vecteur de norme minimale dans C est donc non nul, et invariant par $\pi(G)$, ce qui contredit nos hypothèses. $\square$

2.3 Actions sur des arbres

Soit X un arbre. Notons V l'ensemble des sommets, et $d(x, y)$ la distance entre les sommets x et y de X. Notons encore E l'ensemble des arêtes de X, et $\mathbb{E}$ l'ensemble des arêtes orientées : chaque arête géométrique $e \in E$ apparaît avec deux orientations opposées $e^+, e^- \in \mathbb{E}$. Notons $\mathcal{H}_X$ l'espace des fonctions antisymétriques et à carré sommable sur $\mathbb{E}$:

$$\mathcal{H}_X \; = \; \{\xi \in \ell^2(\mathbb{E}) : \xi(e^+) = -\xi(e^-), \, \forall e \in E\}.$$

Si G est un groupe localement compact agissant par automorphismes sur X, on note σ_X la représentation correspondante de G sur $\mathcal{H}_X$.

Proposition 2 *Si G ne fixe ni sommet ni arête de X, alors $H^1(G, \sigma_X) \neq 0$.*

Preuve : Définissons une application $c : V \times V \to \mathcal{H}_X$: pour $x, y \in V$, $e^+ \in \mathbb{E}$, on pose $c(x,y)(e^+) = 0$ si e^+ n'est pas sur l'unique géodésique joignant x à y, et sinon :

$$c(x,y)(e^+) \;=\; \begin{cases} 1 & \textit{si } e^+ \textit{ pointe de } x \textit{ vers } y; \\ -1 & \textit{si } e^+ \textit{ pointe de } y \textit{ vers } x. \end{cases}$$

L'application c est G-équivariante :

$$c(gx, gy) \;=\; \sigma_X(g)(c(x,y)) \;\; (g \in G;\, x, y \in V).$$

Comme les triangles dans un arbre sont dégénérés (ce sont des tripodes), l'application c vérifie la relation de Chasles :

$$c(x,y) + c(y,z) \;=\; c(x,z) \;\; (x, y, z \in V).$$

Fixons alors un sommet de base x_0 dans V, et posons, pour $g \in G$:

$$b(g) \;=\; c(gx_0, x_0).$$

Grâce aux deux propriétés de c, on vérifie immédiatement que $b : G \to \mathcal{H}_X$ est un 1-cocycle à valeurs dans σ_X.

Raisonnons alors par contraposition, et supposons que $H^1(G, \sigma_X) = 0$. Le cocycle b est donc borné sur G. Comme

$$\|c(x,y)\|_2^2 \;=\; 2d(x,y)$$

pour tous $x, y \in V$, on en déduit que l'orbite de x_0 sous G est bornée. Un lemme élémentaire (Proposition 19 du Chapitre I de [46]) permet alors de conclure que G fixe soit un sommet, soit une arête de X. □

2.4 Actions par difféomorphismes sur le cercle

Notons S^1 le cercle-unité de $\mathbb{R}^2$, paramétré par la longueur d'arc. Notons $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des noyaux K à carré intégrable sur $S^1 \times S^1$ par rapport à la mesure de Lebesgue, et antisymétriques : donc $K(\theta, \phi) = -K(\phi, \theta)$, pour presque tout $(\theta, \phi) \in S^1 \times S^1$.

Notons $Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$ le groupe des difféomorphismes de S^1 de classe $1+\alpha$, avec $\alpha \geq 0$. C'est le groupes des difféomorphismes f du cercle, de classe C^1, tels que f' et $(f^{-1})'$ satisfont une condition de Hölder d'exposant α.

On fait agir $Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$ sur $\mathcal{H}$ au moyen de la représentation unitaire σ : pour $K \in \mathcal{H}, g \in Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$:

$$(\sigma(g)K)(\theta,\phi) \;=\; \sqrt{(g^{-1})'(\theta)(g^{-1})'(\phi)}K(g^{-1}.\theta, g^{-1}.\phi).$$

Si Γ est un groupe et $\Phi : \Gamma \to Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$ un homomorphisme, notons $\sigma_\Phi = \sigma \circ \Phi$ la représentation unitaire correspondante de Γ sur $\mathcal{H}$.

Considérons maintenant le noyau antisymétrique (mais pas à carré intégrable !) donné par :

$$F(\theta,\phi) \;=\; \frac{1}{2\tan(\frac{\theta-\phi}{2})}.$$

Pour $g \in \Gamma$, définissons formellement

$$b_\Phi(g) \;=\; \sigma_\Phi(g)F \;-\; F.$$

En observant qu'au voisinage de la diagonale on a

$$F(\theta,\phi) = \frac{1}{\theta-\phi} \;+\; K_0(\theta,\phi), \tag{1}$$

où K_0 est un noyau continu, on démontre facilement le lemme suivant, dû à Pressley et Segal [42].

Lemme 1 *Pour $\alpha > \frac{1}{2}$, la fonction $b_\Phi(g)$ est à carré intégrable sur $S^1 \times S^1$; donc $b_\Phi : \Gamma \to \mathcal{H}$ définit un 1-cocycle dans $Z^1(\Gamma, \sigma_\Phi)$.* $\square$

Notons Δ la diagonale de $S^1 \times S^1$. La terminologie suivante se justifie par le fait que le quotient de $(S^1 \times S^1)\backslash\Delta$ par la volte $(\theta,\phi) \mapsto (\phi,\theta)$, s'identifie à l'espace des géodésiques du disque de Poincaré.

Définition 4 *Un* **courant géodésique** *est une mesure μ borélienne, positive, régulière sur $(S^1 \times S^1)\backslash\Delta$, telle que*

$$\mu([a,b]\times[c,d]) \;=\; \mu([c,d]\times[a,b])$$

chaque fois que a,b,c,d sont quatre points distincts, cycliquement ordonnés sur S^1.

Exemple 4

La mesure $d\mu_0(\theta,\phi) = \frac{d\theta\, d\phi}{4\sin^2(\frac{\theta-\phi}{2})}$ est un courant géodésique, invariant par l'action par homographies de $SU(1,1) \simeq SL_2(\mathbb{R})$ sur S^1, vu comme bord du disque de Poincaré.

Proposition 3 *Soit* $\alpha > \frac{1}{2}$ *et* $\Phi : \Gamma \to Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$. *Si* b_Φ *appartient à* $B^1(\Gamma, \sigma_\Phi)$, *alors* $\Phi(\Gamma)$ *laisse invariant un courant géodésique* μ, *qui de plus satisfait :*

$$\mu([a,a] \times [b,c]) \;=\; 0 \tag{2}$$

$$\mu([a,b) \times (b,c]) \;=\; \infty \tag{3}$$

chaque fois que a, b, c *sont trois points distincts, cycliquement ordonnés de* S^1.

Preuve : Ecrivons $b_\Phi(g) \;=\; \sigma_\Phi(g)K - K$, pour $K \in \mathcal{H}$. Comme b_Φ est aussi donné par $b_\Phi(g) \;=\; \sigma_\Phi(g)F - F$ on en tire, pour tout $g \in \Gamma$:

$$\sigma_\Phi(g)(F - K) \;=\; F - K.$$

En d'autres termes :

$$\sqrt{(\Phi(g)^{-1})'(\theta)(\Phi(g)^{-1})'(\phi)}(F-K)(\Phi(g)^{-1}.\theta, \Phi(g)^{-1}.\phi) \;=\; (F-K)(\theta,\phi).$$

En élevant au carré :

$$(\Phi(g)^{-1})'(\theta)(\Phi(g)^{-1})'(\phi)(F-K)^2(\Phi(g)^{-1}.\theta, \Phi(g)^{-1}.\phi) \;=\; (F-K)^2(\theta,\phi).$$

Ceci exprime l'invariance par $\Phi(\Gamma)$ du courant géodésique

$$d\mu(\theta,\phi) \;=\; (F-K)^2(\theta,\phi)d\theta\, d\phi.$$

Comme μ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue $d\theta\, d\phi$, la propriété (2) est immédiate. Pour vérifier la propriété (3), on utilise l'équation (1) et le fait que $\frac{1}{\theta - \phi}$ n'est pas à carré intégrable au voisinage de la diagonale Δ. $\square$

Notons encore, sans démonstration, le résultat suivant, dû à A. Navas [39]. Il généralise le fait classique qu'une homographie du cercle qui fixe 3 points, est l'identité.

Proposition 4 *Soit* h *un homéomorphisme préservant l'orientation de* S^1. *Si* h *fixe trois points de* S^1 *et laisse invariant un courant géodésique possédant les propriétés (2) et (3), alors* h *est l'identité de* S^1. $\square$

2.5 Théorème de Delorme-Guichardet

La caractérisation cohomologique suivante de la propriété (T) est due à Delorme [16] et Guichardet [28].

Théorème 4 *Soit G un groupe localement compact σ-compact. Les énoncés suivants sont équivalents :*

i) G a la propriété (T) ;

ii) Pour toute représentation unitaire π de G, on a $H^1(G,\pi) = 0$;

iii) Toute action isométrique affine de G sur un espace de Hilbert possède un point fixe.

A propos de la preuve : L'équivalence $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ résulte des commentaires faits après la Définition 3. L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ résulte de la Proposition 1. Pour la preuve de la réciproque, voir par exemple [14], Chapitre 4. □

De la Proposition 2 découle alors immédiatement le résultat suivant, dû indépendamment à Alperin [1] et Watatani [53].

Corollaire 1 *Toute action d'un groupe de Kazhdan sur un arbre fixe un sommet ou une arête.* □

L'application suivante du Théorème de Delorme-Guichardet est un résultat récent de A. Navas [39]. Il s'agit d'une nouvelle obstruction à la propriété (T) : essentiellement, un groupe infini de difféomorphismes du cercle ne peut avoir la propriété (T). Ceci généralise des résultats de Reznikov ([45], Théorème 1.7 du Chapitre 2). Dans le cas des réseaux dans les groupes de Lie simples de rang au moins 2, on retrouve des résultats de Ghys [23] et Burger-Monod [8] (toutefois valables sous une hypothèse de régularité un peu plus faible).

Théorème 5 *Soit $\alpha > \frac{1}{2}$. Si Γ est un groupe dénombrable ayant la propriété (T), et $\Phi : \Gamma \to Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$ est un homomorphisme, alors $\Phi(\Gamma)$ est un groupe cyclique fini.*

Etapes de la preuve :

- *1er pas :* L'action de $\Phi(\Gamma)$ est libre. En effet, soit $x_0 \in S^1$, et soit $g \in \Gamma$ tel que $\Phi(g)$ fixe x_0. Nous devons montrer que $\Phi(g)$ est l'identité.

  L'argument qui suit, aussi élégant qu'astucieux, est dû à D. Witte. On considère l'application $p : S^1 \to S^1 : z \mapsto z^3$, vue comme un revêtement triple de S^1. La théorie classique des revêtements fournit une extension centrale

$$0 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \tilde{\Gamma} \xrightarrow{q} \Gamma \to 1,$$

ainsi qu'un homomorphisme $\tilde{\Phi} : \tilde{\Gamma} \to Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$ qui relève Φ. D'une part, comme $\tilde{\Gamma}$ a la propriété (T), le groupe $\tilde{\Phi}(\tilde{\Gamma})$ laisse invariant un courant géodésique possédant les propriétés (2) et (3). D'autre part, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit sur S^1 par multiplication par les racines cubiques de l'unité, et les trois images inverses de g dans $\tilde{\Gamma}$ agissent sur la fibre $p^{-1}(x_0)$ par permutations cycliques. L'une d'entre elles, appelons-la $\tilde{g}$, fixe donc chacun des trois points de $p^{-1}(x_0)$. Par la Proposition 4, $\tilde{\Phi}(\tilde{g})$ est l'identité de S^1, donc $\Phi(g)$ également.

- *2ème pas :* $\Phi(\Gamma)$ est abélien fini. Pour cela, on invoque un résultat classique de Hölder : un groupe d'homéomorphismes préservant l'orientation de S^1, et agissant librement sur S^1, est nécessairement abélien (voir par exemple [30], Théorème 3.1.6). Comme $\Phi(\Gamma)$ est abélien et possède la propriété (T), $\Phi(\Gamma)$ est fini.
- *3ème pas :* $\Phi(\Gamma)$ est cyclique. En effet un sous-groupe fini F de $Diff_+^{1+\alpha}(S^1)$ est nécessairement cyclique : puisque F fixe la mesure $\frac{1}{|F|}\sum_{g\in F} g^*(d\theta)$, qui est équivalente à la mesure de Lebesgue $d\theta$, le groupe F est conjugué à un sous-groupe du fixateur de $d\theta$. Mais celui-ci n'est autre que le groupe $SO(2)$ des rotations, et tout sous-groupe fini de $SO(2)$ est cyclique.

Notons que, dans cette preuve, l'hypothèse $\alpha > \frac{1}{2}$ sert uniquement à invoquer le lemme 1. □

Exemple 5

Soit G le groupe de R.J. Thompson, défini comme suit. C'est le groupe des homéomorphismes f de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, préservant l'orientation, linéaires par morceaux, tels que :

- f' a un nombre fini de points de discontinuité, en des rationnels dyadiques ;
- les pentes de f sont des puissances de 2 ;
- $f(0)$ est un rationnel dyadique.

Le groupe G est un groupe simple, infini, de présentation finie. Ghys et Sergiescu [24] ont démontré que G est conjugué à un groupe de difféomorphismes

C^∞ de S^1, et ont demandé si G a la propriété (T). Leur résultat, joint au Théorème 5, montre que la réponse est *négative.*[2]

3 Groupes compactement engendrés

3.1 Un théorème de Shalom

Commençons par un exemple.

Exemple 6

Soit $\Gamma = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la somme directe d'une infinité dénombrable de copies du groupe à deux éléments. D'une part, le groupe Γ n'est pas de type fini, donc n'a pas la propriété (T). D'autre part, on vérifie aisément que, pour toute représentation unitaire irréductible de Γ, c'est-à-dire tout caractère $\chi : \Gamma \to \{\pm 1\}$, on a $H^1(\Gamma, \chi) = 0$.

L'exemple 6 montre que, dans le théorème de Delorme-Guichardet (Théorème 4) on ne peut pas se restreindre à l'annulation de la 1-cohomologie à coefficients dans les représentations irréductibles pour caractériser la propriété (T). Vershik et Karpuchev [51] ont demandé si, néanmoins, une telle caractérisation n'était pas possible pour les groupes *à génération compacte.* La réponse - affirmative - est donnée par le résultat suivant, dû à Y. Shalom ([47], Théorèmes 0.2 et 6.1).

Théorème 6 *Soit G un groupe localement compact, compactement engendré, séparable. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) G a la propriété (T).

ii) Pour toute représentation unitaire π de G, on a $\overline{H^1}(G, \pi) = 0$.

iii) Pour toute représentation unitaire irréductible σ de G, on a $\overline{H^1}(G, \sigma) = 0$.

iv) Pour toute représentation unitaire irréductible σ de G, on a $H^1(G, \sigma) = 0$.

[2] Récemment, D. Farley [18] a montré un résultat plus fort : le groupe G de Thompson a la propriété de Haagerup, ou encore est a-T-menable au sens de Gromov, c'est-à-dire qu'il admet une action isométrique, métriquement propre sur un espace de Hilbert affine.Pour des détails sur cette notion, voir [11].

Parties faciles de la preuve : L'implication $(i) \Rightarrow (iv)$ résulte du Théorème 4, si l'on remarque qu'un groupe compactement engendré est σ-compact. L'implication $(iv) \Rightarrow (iii)$ est triviale. L'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ utilise la théorie de la réduction : comme G est séparable, toute représentation unitaire de G peut s'écrire comme intégrale directe de représentations irréductibles. On invoque alors un résultat de Guichardet ([29], Chapitre 3, §2) : l'annulation de la 1-cohomologie réduite est préservée par intégrale directe.

Pour la preuve de l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$, fixons une partie génératrice compacte Q de G. Si π est une représentation unitaire de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, on définit une fonction continue

$$\delta : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^+ : \xi \mapsto \max_{g \in Q} \|\pi(g)\xi - \xi\|.$$

Le lemme suivant est l'ingrédient principal pour finir la preuve du Théorème 6.

Lemme 2 *Supposons que π ait presque des vecteurs invariants, mais pas de vecteur invariant non nul. Pour tout $M > 1$, il existe un vecteur $v_M \in \mathcal{H}$ tel que $\delta(v_M) = 1$ et $\delta(u) > \frac{1}{2}$ pour tout $u \in \mathcal{H}$ tel que $\|u - v_M\| < M$.*

Preuve : On va montrer que, pour tout $M > 1$, il existe $r > 0$ et $w_M \in \mathcal{H}$ tels que $\delta(w_M) = \frac{r}{M}$ et $\delta(u) > \frac{r}{2M}$ pour tout $u \in \mathcal{H}$ avec $\|u - w_M\| < r$. Il suffira alors de poser $v_M = \frac{M w_M}{r}$ pour conclure.

En effet, comme π possède presque des vecteurs invariants, on trouve d'abord un vecteur $w_1 \in \mathcal{H}$ tel que $\|w_1\| > 1$ et $\delta(w_1) = \frac{1}{2M}$.

Si $\delta(u) > \frac{1}{4M}$ pour tout $u \in \mathcal{H}$ tel que $\|u - w_1\| < \frac{1}{2}$, alors $r = \frac{1}{2}$ et $w_M = w_1$ font l'affaire.

Sinon, il existe $u \in \mathcal{H}$ tel que $\|u - w_1\| < \frac{1}{2}$ et $\delta(u) \leq \frac{1}{4M}$. Par continuité de δ, on trouve $w_2 \in \mathcal{H}$ tel que $\|w_2 - w_1\| < \frac{1}{2}$ et $\delta(w_2) = \frac{1}{4M}$.

Si $\delta(u) > \frac{1}{8M}$ pour tout $u \in \mathcal{H}$ tel que $\|u - w_2\| < \frac{1}{4}$, alors $r = \frac{1}{4}$ et $w_M = w_2$ font l'affaire.

Sinon, il existe $u \in \mathcal{H}$ tel que $\|u - w_2\| < \frac{1}{4}$ et $\delta(u) \leq \frac{1}{8M}$. Par continuité de δ, on trouve $w_3 \in \mathcal{H}$ tel que $\|w_3 - w_2\| < \frac{1}{4}$ et $\delta(w_3) = \frac{1}{8M}$.

Cette construction par récurrence s'arrête en un nombre fini de pas. En effet, dans le cas contraire on construit une suite $(w_i)_{i \geq 1}$ dans $\mathcal{H}$, telle que $\|w_{i+1} - w_i\| < \frac{1}{2^i}$ et $\delta(w_{i+1}) = \frac{1}{2^{i+1}M}$ pour tout $i \geq 1$. Cette suite est une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}$, elle converge vers un vecteur $w \in \mathcal{H}$, non nul (car

$\|w_1\| > 1$) et tel que $\delta(w) = 0$ (par continuité de δ). Donc w est fixe par tout élément de Q. Comme Q engendre G, le vecteur w est invariant non nul, ce qui contredit notre hypothèse sur π. $\square$

Idées pour finir la preuve du Théorème 6 : Il reste à démontrer l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$, ce qui se fait par contraposition. Si G n'a pas la propriété (T), on trouve une représentation unitaire π de G, qui possède presque des vecteurs invariants mais pas de vecteurs invariants non nuls. Par le lemme 2, pour tout $m \in \mathbb{N}$ on trouve un vecteur v_m tel que $\delta(v_m) = 1$ et $\delta(u) > \frac{1}{2}$ pour tout u dans la boule de rayon m centrée en v_m.

Heuristiquement, la preuve consiste à considérer la suite des boules B_m centrées en v_m et de rayon m, munies de la "restriction de l'action" de G (bien sûr, les B_m ne sont pas G-invariantes, mais "presque" : comme $\delta(v_m) = 1$, les éléments de Q déplacent très peu le centre, par rapport au rayon). L'idée est d'extraire de cette suite une sous-suite convergente dans l'espace des G-espaces métriques : l'espace-limite sera un espace de Hilbert muni d'une action isométrique affine α de G, de partie linéaire σ. La condition $\delta(u) > \frac{1}{2}$ pour tout u dans la réunion des B_m, montre que α n'a pas presque des points fixes. Par l'interprétation de la 1-cohomologie réduite donnée à la section 2.1, on en tire que $\overline{H^1}(G, \sigma) \neq 0$.

Cette heuristique se coule en un argument d'analyse fonctionnelle classique, grâce à la notion de *fonction conditionnellement de type négatif.* Une fonction continue $\psi : G \to \mathbb{R}^+$ est conditionnellement de type négatif si $\psi(1) = 0$, $\psi(g) = \psi(g^{-1})$ pour tout $g \in G$, et pour tous $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in G; \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \psi(g_i^{-1} g_j) \leq 0.$$

Les fonctions conditionnellement de type négatif sur G forment un cône convexe, fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de G. Si α est une action isométrique affine de G sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et $v \in \mathcal{H}$, la fonction $\psi(g) = \|\alpha(g)v - v\|^2$ est conditionnellement de type négatif. Cet exemple est en fait général : une construction de type Gelfand-Naimark-Segal (voir [14], chapitre 5) montre qu'à toute fonction ψ conditionnellement de type négatif sur G, on associe un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\psi$ et une action isométrique affine α_ψ de G sur $\mathcal{H}_\psi$, telle que l'orbite $\alpha_\psi(G)(0)$ engendre un sous-espace dense, et $\psi(g) = \|\alpha_\psi(g)(0)\|^2$. Shalom a montré (lemme 6.5 et corollaire 6.6 de [47]) que l'action α_ψ ne possède pas presque des points fixes si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous nombres réels positifs $a_1, \ldots, a_n$ avec $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, et tous $g_1, \ldots, g_n \in G$ il existe $g \in Q$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j (\psi(g_i^{-1} g g_j) - \psi(g_i^{-1} g_j)) \geq \epsilon. \tag{4}$$

Si $\psi(g) = \|\alpha(g)v - v\|^2$, et $u = \sum_{i=1}^n a_i \alpha(g_i) v$, l'équation (4) est équivalente à :

$$\|\alpha(g)u - u\|^2 \geq \epsilon. \tag{5}$$

Reprenons la preuve de l'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ du Théorème 6, en supposant le groupe G *discret* [3]. Posons $\psi_m(g) = \|\pi(g)v_m - v_m\|^2$: la fonction ψ_m est conditionnellement de type négatif sur G (on voit l'action linéaire π comme une action affine). Tout élément $g \in G$ peut s'écrire comme un mot de longueur k sur $Q \cup Q^{-1}$; par inégalité triangulaire, on en tire

$$\sqrt{\psi_m(g)} \leq k\delta(v_m) = k. \tag{6}$$

La suite $(\psi_m)_{m>1}$ est donc bornée sur les parties finies de G. Le théorème d'Ascoli-Arzela permet d'extraire de cette suite une sous-suite convergeant vers une fonction conditionnellement de type négatif ψ. Il reste à montrer que α_ψ n'a pas presque des points fixes.

Pour ce faire, nous allons montrer que l'inégalité (4) est satisfaite avec $\epsilon = \frac{1}{4}$. Si ce n'était pas le cas, on trouverait $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$, avec $\sum_{i=1}^n a_i = 1$, et $g_1, \ldots, g_n \in G$ tels que pour tous $g \in Q$:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j (\psi(g_i^{-1} g g_j) - \psi(g_i^{-1} g_j)) < \frac{1}{4}.$$

La même inégalité est donc satisfaite par les fonctions ψ_m, pour une infinité d'indices m. Par l'inégalité (5), elle se ré-écrit, avec $u_m = \sum_{i=1}^n a_i \pi(g_i) v_m$:

$$\|\pi(g)u_m - u_m\|^2 < \frac{1}{4}$$

pour tout $g \in Q$, ou encore $\delta(u_m) < \frac{1}{2}$. Soit k tel que $g_1, \ldots, g_n$ s'écrivent comme des mots de longueur au plus k sur $Q \cup Q^{-1}$. Pour $m > k$, l'inégalité

[3] Le cas général exige de raffiner le lemme 2, pour assurer que la famille de fonctions $(g \mapsto \|\pi(g)v_M - v_M\|)_{M>1}$ est équicontinue sur les parties compactes de G.

(6) montre que les $\pi(g_1)v_m, \ldots, \pi(g_n)v_m$ sont dans la boule B_m, et donc $u_m \in B_m$. Mais le lemme 2 implique alors que $\delta(u_m) > \frac{1}{2}$: en prenant m assez grand, on arrive ainsi à une contradiction. $\square$

Shalom a aussi obtenu une conséquence remarquable du Théorème 6, ou plutôt de sa preuve :

Corollaire 2 *Tout groupe de Kazhdan dénombrable est quotient d'un groupe de Kazhdan de présentation finie.*

Preuve : Soit Γ un groupe de Kazhdan dénombrable. Comme Γ est de type fini, on peut l'écrire comme quotient d'un groupe libre d'un certain rang m fini :

$$\Gamma = \mathbb{F}_m/N.$$

Soit $r_1, r_2, \ldots$ une énumération des éléments du sous-groupe normal N. Notons N_n le sous-groupe normal de $\mathbb{F}_m$ engendré par $\{r_1, \ldots, r_n\}$, et posons $\Gamma_n = \mathbb{F}_m/N_n$. On va montrer qu'il existe n tel que Γ_n a la propriété (T).

Si ce n'était pas le cas, on trouverait pour tout n une représentation unitaire π_n de Γ_n, possédant presque des vecteurs invariants, mais sans vecteur invariant non nul. On voit π_n comme une représentation du groupe libre $\mathbb{F}_m$. Soit Q une base de $\mathbb{F}_m$. Le lemme 2 fournit, pour tout n, un vecteur v_n dans l'espace de Hilbert de π_n, tel que $\delta(v_n) = 1$ et $\delta(u) \geq \frac{1}{2}$ pour tout u dans la boule centrée en v_n et de rayon n. Pour $g \in \mathbb{F}_m$, posons $\psi_n(g) = \|\pi_n(g)v_n - v_n\|^2$. Comme dans la preuve du Théorème 6, on peut extraire de la suite $(\psi_n)_{n\geq 1}$ une sous-suite qui converge ponctuellement sur $\mathbb{F}_m$ vers une fonction conditionnellement de type négatif ψ, telle que l'action isométrique affine α_ψ n'a pas presque des points fixes, et en particulier n'a pas de point fixe. D'autre part, la fonction ψ_n s'annule sur N_n, donc ψ s'annule sur N (qui est la réunion croissante des N_n). Ceci veut dire que l'action isométrique affine α_ψ factorise par Γ, ce qui contredit la propriété (T) pour Γ. $\square$

Exemple 7

Notons $\mathbb{F}_p[X]$ (resp. $\mathbb{F}_p((X))$) l'anneau des polynômes (resp. le corps des séries formelles) à coefficients dans le corps fini $\mathbb{F}_p$ d'ordre p premier. Le groupe $\Gamma = SL_3(\mathbb{F}_p[X])$ est isomorphe à $\Gamma = SL_3(\mathbb{F}_p[\frac{1}{X}])$, lequel est un réseau dans $SL_3(\mathbb{F}_p((X)))$. Par les Théorèmes 1 et 2, le groupe Γ a la propriété (T). D'autre part, Behr [3] a montré que Γ n'est pas de présentation finie [4]. Un *problème ouvert* consiste à décrire explicitement un groupe de Kazhdan de présentation finie qui se surjecte sur Γ. Le groupe $SL_3(\mathbb{Z}[X])$ se qualifie-t-il pour cela ? (à ma connaissance, on ne sait pas si $SL_3(\mathbb{Z}[X])$ est de présentation finie, ni s'il a la propriété (T)).

3.2 Propriété (T) et applications harmoniques

La possibilité d'exploiter la théorie des applications harmoniques (et spécialement la super-rigidité "géométrique") pour établir la propriété (T), a déjà été discutée dans le Séminaire Bourbaki 778, de P. Pansu [40]. Nous allons commencer par exposer un résultat non publié de Y. Shalom, qui lie la propriété (T) d'un groupe G aux applications harmoniques à valeurs dans un espace de Hilbert, G-équivariantes par rapport à une action affine isométrique de G.

Définition 5 *Soit G un groupe localement compact, et K un sous-groupe compact.*

a) La paire (G, K) est une **paire de Gelfand** *si l'algèbre de convolution $C_c(G//K)$ des fonctions continues, K-bi-invariantes, à support compact, est commutative.*

b) Si (G, K) est une paire de Gelfand, une représentation unitaire irréductible π de G est **sphérique** *si elle admet des vecteurs K-fixes non nuls [5].*

Pour les représentations sphériques, Delorme [16] a obtenu un résultat d'annulation de la 1-cohomologie :

Théorème 7 *Soit (G, K) une paire de Gelfand. Si π est une représentation sphérique non triviale de G, alors $H^1(G, \pi) = 0$.* □

Voici alors le résultat de Shalom.

Théorème 8 *Soit (G, K) une paire de Gelfand, où G est un groupe de Lie connexe avec $G/\overline{[G, G]}$ compact. Si G n'a pas la propriété (T), il existe une application F harmonique, non constante, G-équivariante de G/K vers un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni d'une action isométrique affine de G.*

[4] Notons que, pour $n \geq 4$, le groupe $SL_n(\mathbb{F}_p[X])$ est de présentation finie ! C'est un résultat de Rehmann et Soulé [43]

[5] Dans ce cas, l'espace des vecteurs K-fixes est de dimension 1.

Preuve : Commençons par construire l'application F. Comme G n'a pas la propriété (T), par le Théorème 6 il existe une représentation unitaire irréductible π de G, sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, telle que $H^1(G,\pi) \neq 0$. Comme $G/\overline{[G,G]}$ est compact, π n'est pas la représentation triviale de dimension 1. Soit $b \in Z^1(G,\pi)$ un cocycle qui n'est pas un cobord ; notons α l'action isométrique affine de G sur $\mathcal{H}$ associée à b. Comme K a la propriété (T) (ou simplement en moyennant sur K par rapport à la mesure de Haar dk normalisée) on trouve un point $v_0 \in \mathcal{H}$ fixe par $\alpha(K)$. On peut alors considérer l'application orbitale $\tilde{F} : G \to \mathcal{H} : g \mapsto \alpha(g)(v_0)$, qui factorise en une application $F : G/K \to \mathcal{H} : gK \mapsto \alpha(g)(v_0)$ non constante, G-équivariante. Nous allons montrer en 3 pas que F est harmonique.

- *1er pas* Le point v_0 est l'unique point de $\mathcal{H}$ fixé par $\alpha(K)$. En effet, s'il existait un deuxième point v_1 fixe par $\alpha(K)$, le vecteur non nul $v_0 - v_1$ serait fixe par la partie linéaire $\pi(K)$, et π serait sphérique, ce qui contredirait le Théorème 7.
- *2ème pas* Pour tous $g, h \in G$, on a $\int_K \tilde{F}(gkh)\, dk \;=\; \tilde{F}(g)$. En effet, pour tout $v \in \mathcal{H}$, on a, par le premier pas : $\int_K \alpha(k)v\, dk \;=\; v_0$ (car le membre de gauche est fixe par $\alpha(K)$). Donc :

  $$\int_K \tilde{F}(gkh)\, dk \;=\; \alpha(g) \int_K \alpha(k)\alpha(h)v_0\, dk \;=\; \alpha(g)v_0 \;=\; \tilde{F}(g).$$

  Pour $x_0 = g_0 K$ et x des points de G/K, on peut ré-écrire :

  $$\int_K F(g_0 k g_0^{-1} x)\, dk \;=\; F(x_0), \tag{7}$$

  qui veut dire que la moyenne de F sur toute orbite du fixateur de x_0 est égale à la valeur de F en x_0 (on est donc très proche de la caractérisation des fonctions harmoniques par la propriété de la moyenne).
- *3ème pas* Pour $u \in \mathcal{H}$, posons $\tilde{F}_u(g) \;=\; \langle \tilde{F}(g)|u \rangle$ et $F_u(x) \;=\; \langle F(x)|u \rangle$. Montrons que F est harmonique au sens fort, c'est-à-dire que $D(F_u) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{H}$ et tout opérateur D sur $C^\infty(G/K)$, G-invariant, nul sur les constantes. Reprenons l'équation (7) : pour tout $g_0 \in G$, la fonction $x \mapsto \int_K F_u(g_0 k g_0^{-1} x)\, dk$ est constante, donc par G-invariance de D :

  $$0 \;=\; D(\int_K F_u(g_0 k g_0^{-1} x)\, dk) \;=\; \int_K (DF_u)(g_0 k g_0^{-1} x)\, dk;$$

pour $x = x_0$, on en tire $(DF_u)(x_0) = 0$, donc DF_u est identiquement nulle.

$\square$

Pour faire le lien entre propriété (T) et super-rigidité géométrique, énonçons un résultat de J. Jost [33].

Théorème 9 *Soit X un espace riemannien symétrique irreductible du type non compact, distinct de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ ou complexe $\mathbb{H}^n(\mathbb{C})$; soit Γ un réseau co-compact du groupe des isométries de X. Soit N une variété riemannienne complète simplement connexe, à courbure sectionnelle négative (≤ 0), éventuellement de dimension infinie, sur laquelle Γ agit par isométries. Soit $F : X \to N$ une application harmonique Γ-équivariante. Ou bien F est constante, ou bien F est (après multiplication de la métrique de N par un scalaire positif) un plongement isométrique totalement géodésique.*

L'exemple le plus simple de variété riemannienne complète, simplement connexe, à courbure sectionnelle négative, qui soit de dimension infinie, est évidemment un espace de Hilbert. Dans ce cas, l'application F du Théorème 9 ne peut pas être un plongement isométrique totalement géodésique. Donc F est constante. Nous voyons que le Théorème 9, combiné au Théorème 8, fournit une preuve (plutôt coûteuse) de la propriété (T) pour les groupes de Lie simples connexes de centre fini, non localement isomorphes à $SO(n,1)$ ou $SU(n,1)$.

Terminons cette section en expliquant une preuve récente, due à M. Gromov ([25], 3.7.D'), de la propriété (T) pour les groupes $Sp(n,1)$ et $F_{4(-20)}$, de rang réel 1 (voir Théorème 3(ii)).

Soit X un espace riemannien symétrique irréductible de rang 1 de type non compact : X est donc un espace hyperbolique $\mathbb{H}^n(\mathbb{K})$ de dimension n sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ou Cay (et $n = 2$ dans ce cas).

Fixons quelques notations. G est la composante connexe du neutre du groupe des isométries de X ; K est un sous-groupe compact maximal de G, et $x_0 \in X$ un point dont le fixateur dans G est exactement K. On pose encore $d = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$, $m_1 = d(n-1)$, $m_2 = d-1$ (m_1, m_2 sont les paramètres du groupe nilpotent qui apparaît dans la décomposition d'Iwasawa de G).

Notons r la distance géodésique de x à x_0 dans X. Une fonction f à valeurs réelles sur X est *radiale* si elle ne dépend que de r, c'est-à-dire s'il existe une autre fonction ϕ telle que $f(x) = \phi(r)$. Normalisons la métrique de sorte que l'inclusion $\mathbb{H}^{n-1}(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbb{H}^n(\mathbb{K})$ soit un plongement isométrique totalement géodésique. Le laplacien sur une fonction radiale $f(x) = \phi(r)$ est alors donné par l'expression

$$\Delta f = -\phi'' - m(r)\phi', \tag{8}$$

où $m(r) = m_1 \coth r + 2m_2 \coth 2r$ (voir [17]).

J'ai eu besoin du lemme suivant pour comprendre la page 37 de [25].

Lemme 3 *Soit F une application G-équivariante de X vers un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ muni d'une action isométrique affine de G, telle que $F(x_0) = 0$. Alors :*

i) Si F est non constante, il existe une constante $\lambda > 0$ telle que λF est localement isométrique, c'est-à-dire $\lambda\|dF_x(Y)\| = \|Y\|$ pour tous $x \in X$, $Y \in T_x X$.

ii) Pour tout $x \in X$, on a $Re\langle \Delta F(x)|F(x)\rangle \geq 0$.

Preuve du point (i) : Notons π la partie linéaire de l'action affine de G sur $\mathcal{H}$. La différentielle dF_{x_0} est un opérateur d'entrelacement entre la représentation d'isotropie de K sur $T_{x_0}X$ et la restriction de π à K. Les deux formes quadratiques sur T_{x_0} :

$$Y \mapsto \|Y\|^2;\ Y \mapsto \|dF_{x_0}(Y)\|^2$$

sont K-invariantes. Comme la représentation d'isotropie est irréductible, le lemme de Schur assure que ces deux formes quadratiques sont proportionnelles : il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda\|dF_{x_0}(Y)\| = \|Y\|$ pour tout $Y \in T_{x_0}X$. La transitivité de l'action de G sur X, et la G-équivariance de F, permettent de conclure. □

La preuve du point (ii) est plus calculatoire, et ré-utilise le Théorème 7 ; pour les détails, voir [4], 3.6.18.

L'idée de Gromov pour établir la propriété (T) pour $Sp(n, 1)$ et $F_{4(-20)}$ est d'étudier la croissance des applications G-équivariantes $X \to \mathcal{H}$ et de montrer que, parmi celles-ci, les applications harmoniques ont la croissance la plus rapide. La proposition suivante résume les idées de [25], 3.7.D'.

Proposition 5 *Soit $F : X \to \mathcal{H}$ une application G-équivariante, localement isométrique, avec $F(x_0) = 0$. Soit ϕ la fonction sur $\mathbb{R}^+$ définie par $\phi(r) = \|F(x)\|^2$. Alors, pour $r \to \infty$:*

$$\phi(r) \leq \frac{2 \dim X}{m_1 + 2m_2} r + o(r),$$

avec égalité si F est harmonique.

Preuve : Si M est une variété riemannienne et $h : M \to \mathcal{H}$ est une application vers un espace de Hilbert, un calcul facile montre que, pour $x \in M$:

$$\Delta \|h\|^2(x) \;=\; 2Re\langle \Delta h(x)|h(x)\rangle - 2\|dh_x\|^2_{HS}, \tag{9}$$

où $\|dh_x\|_{HS} = \sqrt{Tr((dh_x)^* dh_x)}$ est la norme de Hilbert-Schmidt de la différentielle dh_x. En particulier, si h est localement isométrique, on a $\|dh_x\|^2_{HS} = \dim M$.

Appliquons ceci avec $M = X$, $h = F$. En combinant les équations (8) et (9), on obtient :

$$\phi'' + m(r)\phi' \;=\; -2Re\langle \Delta F(x)|F(x)\rangle + 2\dim X;$$

c'est une équation différentielle ordinaire du second ordre en ϕ, qu'on peut résoudre par la méthode de variation des constantes. Comme $Re\langle \Delta F(x)|F(x)\rangle \geq 0$ (voir le lemme 3(ii)), la solution ϕ sera dominée par la solution de l'équation obtenue en annulant le terme $-2Re\langle \Delta F(x)|F(x)\rangle$. Un calcul direct donne alors le résultat. $\square$

La constante $\frac{2\dim X}{m_1+2m_2}$ se calcule aisément dans les différents cas :

X	$\frac{2\dim X}{m_1+2m_2}$
$\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$	$2+\frac{2}{n-1}$
$\mathbb{H}^n(\mathbb{C})$	2
$\mathbb{H}^n(\mathbb{H})$	$2-\frac{2}{2n+1}$
$\mathbb{H}^1(Cay)$	$\frac{8}{7}$
$\mathbb{H}^2(Cay)$	$\frac{16}{11}$

On voit ici la principale différence entre les quatre familles d'espaces hyperboliques. Pour $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$, la constante $\frac{2\dim X}{m_1+2m_2}$ décroît avec la dimension ; pour $\mathbb{H}^n(\mathbb{C})$ elle ne dépend pas de la dimension ; pour $\mathbb{H}^n(\mathbb{H})$ ou $\mathbb{H}^n(Cay)$, elle augmente avec la dimension.

Preuve du Théorème 3(ii) : Nous voulons montrer que, pour $n \geq 2$, le groupe $G = Sp(n,1)$ a la propriété (T). Supposons par l'absurde qu'il ne l'a pas. Par le Théorème 8, il existe une application G-équivariante, harmonique, non constante, F de $X = \mathbb{H}^n(\mathbb{H})$ vers un espace de Hilbert. Quitte à conjuguer l'action affine de G par une translation, nous pouvons supposer $F(x_0) = 0$; par le lemme 3(ii), nous pouvons supposer que F est localement isométrique.

Soit $\phi(r) = \|F(x)\|^2$. L'idée est de restreindre F à une droite hyperbolique quaternionienne $L = \mathbb{H}^1(\mathbb{H})$ passant par x_0 ; le groupe d'isométries de L est $G' = Sp(1,1)$. La restriction $F|_L$ est localement isométrique, G'-équivariante (mais pas nécessairement harmonique). Comme L est totalement géodésique dans X, on a $\|F|_L(x)\|^2 = \phi(r)$ pour $x \in L$. Par deux applications de la Proposition 5, on a, pour $r \to \infty$:

$$\phi(r) \leq \frac{4}{3}r + o(r) < (2 - \frac{2}{2n+1})r + o(r) = \phi(r),$$

ce qui est une contradiction. La preuve pour $F_{4(-20)}$ est tout-à-fait semblable. $\square$

3.3 Extensions centrales

Nous allons exposer ici la preuve de Shalom d'un résultat de Serre (voir [14], Théorème 12 du Chapitre 2), qui permet de relever la propriété (T) à des extensions centrales. Le lemme suivant est facile.

Lemme 4 *Soit Z un sous-groupe fermé central du groupe localement compact G. Soit π une représentation unitaire irréductible de G. Si la restriction de π à Z est non triviale, alors $H^1(G, \pi) = 0$.*

Preuve : Par le lemme de Schur, il existe un caractère $\chi : Z \to S^1$ tel que $\pi(z) = \chi(z)Id$ pour tout $z \in Z$. Soit $z_0 \in Z$ tel que $\chi(z_0) \neq 1$. Soit $b \in Z^1(G, \pi)$; montrons que b est un cobord. Pour $g \in G$, la relation de cocycle donne :

$$\pi(g)b(z_0) + b(g) = b(gz_0) = b(z_0g) = \chi(z_0)b(g) + b(z_0)$$

ou encore :

$$b(g) = \pi(g)(\frac{b(z_0)}{\chi(z_0) - 1}) - \frac{b(z_0)}{\chi(z_0) - 1},$$

donc $b \in B^1(G, \pi)$. $\square$

Théorème 10 *Soit G un groupe localement compact, compactement engendré, séparable. On suppose de plus que l'abélianisé séparé $G/\overline{[G,G]}$ est compact. Soit Z un sous-groupe fermé central de G. Si G/Z a la propriété (T), alors G l'a également.*

Preuve : Par le Théorème 6, il suffit de montrer que, si π est une représentation unitaire irréductible de G, alors $H^1(G, \pi) = 0$. Si π est non triviale sur Z, cela résulte du lemme 4. Supposons donc π triviale sur Z, et voyons π comme une représentation de G/Z. Soit $b \in Z^1(G, \pi)$. Si la restriction de b à Z est identiquement nulle, alors b factorise par G/Z, et la propriété (T) pour G/Z assure que b est un cobord.

Il reste à montrer que b doit s'annuler sur Z. Si ce n'était pas le cas, on trouverait $z_0 \in Z$ tel que $b(z_0) \neq 0$ et donc, pour tout $g \in G$:

$$\pi(g)b(z_0) + b(g) = b(gz_0) = b(z_0 g) = b(g) + b(z_0),$$

ou encore

$$\pi(g)b(z_0) = b(z_0).$$

La représentation π admet donc un vecteur fixe non nul. Comme elle est irréductible, cela implique que π est la représentation triviale en dimension 1, et que b est un homomorphisme continu de G vers $\mathbb{C}$. Comme $G/\overline{[G,G]}$ est compact, b doit être identiquement nul, ce qui contredit notre hypothèse $b(z_0) \neq 0$. □

Du Théorème 10, on déduit immédiatement :

Corollaire 3 *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe, et Γ un réseau dans G. Notons $\tilde{G}$ le revêtement universel de G, et $\tilde{\Gamma}$ l'image inverse de Γ dans G.*

i) G a la propriété (T) si et seulement si $\tilde{G}$ l'a ;

ii) Γ a la propriété (T) si et seulement si $\tilde{\Gamma}$ l'a.

□

Ce Corollaire montre que, pour les groupes de Lie semi-simples, la propriété (T) est un invariant d'isomorphisme local [6].

Le Corollaire 3 est spécialement intéressant pour un groupe de Lie G simple, à groupe fondamental cyclique infini [7] : si le rang réel de G est ≥ 2, alors $\tilde{G}$ est un exemple de groupe de Kazhdan à centre infini. C'est le cas pour $G = Sp_{2n}(\mathbb{R})\,(n \geq 2)$, $G = SU(p,q)\,(2 \leq p \leq q)$, $G = SO(2,m)\,(m \geq 3), \ldots$

[6] Ceci est *faux* pour les groupes de Lie quelconques : penser au cercle et à la droite réelle !

[7] On sait que ceci se produit exactement quand l'espace symétrique associé à G est un domaine hermitien symétrique irréductible.

Exploitons cette dernière remarque pour donner une réponse - négative - à une question posée dans [14] : pour les groupes de type fini, la propriété (T) n'est *pas* un invariant de quasi-isométrie. Il est difficile d'attribuer ce résultat avec précision : au printemps 2000, plusieurs exemples ont surgi un peu partout... Je dirai simplement que la construction suivante m'a été expliquée par C. Pittet.

Proposition 6 *Soit Γ un réseau co-compact dans un groupe de Lie G simple, de rang réel au moins 2, à groupe fondamental cyclique infini. Soit $\tilde{G}$ le revêtement universel de G, et $\tilde{\Gamma}$ l'image inverse de Γ dans $\tilde{G}$. Le groupe $\tilde{\Gamma}$, qui a la propriété (T), est quasi-isométrique au groupe $\Gamma \times \mathbb{Z}$, qui n'a pas la propriété (T).*

Preuve : Par le Corollaire 3, le groupe $\tilde{\Gamma}$ a la propriété (T), et bien sûr le groupe $\Gamma \times \mathbb{Z}$ ne l'a pas.

Soit $G = ANK$ une décomposition d'Iwasawa de G, avec K un sous-groupe compact maximal. Munissons G/K de sa structure riemannienne d'espace riemannien symétrique, et G, K de structures riemanniennes invariantes à gauche ; relevons ces dernières aux revêtements universels $\tilde{G}$ et $\tilde{K}$. Le groupe $\tilde{\Gamma}$ agit librement, isométriquement, avec quotient compact, sur $\tilde{G}$: les espaces métriques $\tilde{\Gamma}$ et $\tilde{G}$ sont donc quasi-isométriques. De même, $\Gamma \times \mathbb{Z}$ agit proprement isométriquement, avec quotient compact, sur $G/K \times \tilde{K}$: les espaces métriques $\Gamma \times \mathbb{Z}$ et $G/K \times \tilde{K}$ sont donc quasi-isométriques.

Il suffit donc de montrer que $\tilde{G}$ et $G/K \times \tilde{K}$ sont quasi-isométriques. Et pour ce faire, il suffit de s'assurer que G et $G/K \times K$ sont bi-Lipschitz-équivalents.

Pour voir ceci, identifions AN à G/K de façon AN-équivariante, et considérons l'application

$$\psi : G \to AN \times K : ank \mapsto (an, k);$$

c'est un difféomorphisme AN-équivariant. Fixons $x \in G$; comme deux normes sur $\mathbb{R}^n$ sont bi-Lipschitz-équivalentes, il existe une constante $C_x > 0$ telle que, pour tout vecteur Y tangent à G en x :

$$\frac{1}{C_x}\|Y\| \;\leq\; \|d\psi_x(Y)\| \;\leq\; C_x\|Y\|.$$

Par compacité de K, on trouve $C > 0$ tel que, pour tout $k \in K$ et tout vecteur Y tangent à G en xk :

$$\frac{1}{C}\|Y\| \;\leq\; \|d\psi_{xk}(Y)\| \;\leq\; C\|Y\|.$$

Enfin, comme ψ est AN-équivariante, cette constante C est indépendante de x, ce qui montre que ψ est bi-lipschitzien. $\square$

Par contraste avec la Proposition 6, l'annulation de la 1-cohomologie *à coefficients dans la représentation régulière gauche* est un invariant de quasi-isométrie pour les groupes de type fini, voir [5].

4 Le critère spectral

4.1 L'approche

Soit X une variété compacte, ou un CW-complexe fini. Notons $\tilde{X}$ le revêtement universel de X, et $\Gamma = \pi_1(X)$ le groupe fondamental de X.

Dans [40], Pansu propose le programme suivant pour démontrer que Γ a la propriété (T). Soit π une représentation unitaire de Γ, sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$: on veut montrer que $H^1(\Gamma, \pi) = 0$. Pour cela, on considère le produit $\tilde{X} \times \mathcal{H}_\pi$, muni de l'action diagonale de Γ. Le quotient $E_\pi = \tilde{X} \times_\Gamma \mathcal{H}_\pi$ est un fibré plat, de fibre $\mathcal{H}_\pi$ au-dessus de X. La cohomologie des groupes assure alors que :

$$H^1(\Gamma, \pi) = H^1(X, E_\pi);$$

le membre de droite se comprenant comme la 1-cohomologie des formes différentielles à valeurs dans E_π si X est une variété, et comme la 1-cohomologie cellulaire à coefficients dans E_π si X est un CW-complexe.

Si X est une variété, on peut faire appel à la théorie de Hodge (ceci n'est *pas* trivial, puisque les fibres de E_π sont en général de dimension infinie ! - voir Mok [38], Corollaire 0.1 pour les détails) : Γ a la propriété (T) si et seulement si, pour toute représentation unitaire π de Γ, il n'y a pas de 1-forme harmonique non nulle sur X à valeurs dans E_π. Si X est un espace riemannien symétrique irreductible du type non compact, distinct de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ ou complexe $\mathbb{H}^n(\mathbb{C})$, la formule de Bochner-Weitzenböck montre que le laplacien sur les 1-formes à valeurs dans E_π est borné inférieurement par une constante strictement positive, donc a un noyau trivial : c'est ainsi que Mok ([38], Corollaire 0.2) démontre le Théorème 2 (pour les groupes de Lie simples réels) et le Théorème 3(ii). Il est à noter que la borne inférieure sur le laplacien est indépendante de la représentation π, et ne dépend que du tenseur de courbure de X.

Dans le cas où $\tilde{X}$ est l'immeuble de Bruhat-Tits associé à un groupe algébrique simple $\mathbb{G}$ sur un corps local non archimédien $\mathbb{K}$, Garland [21] avait dès 1973 fait marcher le programme esquissé ci-dessus : si Γ est un réseau co-compact dans $\mathbb{G}(\mathbb{K})$, alors $H^1(\Gamma, \pi) = 0$ pour toute représentation unitaire π *de dimension finie* de Γ : l'hypothèse de finitude de la dimension s'explique par le recours à la théorie de Hodge (voir aussi l'exposé de Borel [6]). P. Pansu [41], dans le cas des immeubles de type $\tilde{A}_2$, et W. Ballmann et J. Swiatkowski [2] ainsi que A. Zuk [55] indépendamment, dans le cas plus général d'un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2, ont pu éliminer l'usage de la théorie de Hodge. La condition locale de courbure se lit alors sur les links de sommets, qui sont des graphes, plus particulièrement sur les valeurs propres du laplacien combinatoire sur les links.

Définition 6 *Soit $L = (V, E)$ un graphe fini. Le* **laplacien combinatoire** *de L est l'opérateur auto-adjoint $\Delta_L : \ell^2(V) \to \ell^2(V)$ défini par :*

$$(\Delta_L f)(x) = f(x) - \frac{1}{\deg x} \sum_{y \text{ voisin de } x} f(y)$$

($f \in \ell^2(V), x \in V$). Les **valeurs propres de** *L sont celles de Δ_L :*

$$0 = \lambda_0(L) \leq \lambda_1(L) \leq \ldots \leq 2$$

(avec $0 < \lambda_1(L)$ si et seulement si L est connexe).

Le résultat de Ballman-Swiatkowski [2] et Zuk [55] s'énonce :

Théorème 11 *Soit $\tilde{X}$ un complexe simplicial localement fini, simplement connexe, de dimension 2, tel que pour chaque sommet $v \in \tilde{X}$ le link L_v satisfait $\lambda_1(L_v) > \frac{1}{2}$. Si Γ est un groupe agissant proprement et avec quotient compact sur $\tilde{X}$, alors Γ a la propriété (T).* □

Exemple 8

1) Soit $\tilde{X}$ le pavage du plan euclidien par des triangles équilatéraux. Les links de sommets sont des cycles de longueur 6, pour lesquels on a $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. D'autre part, le groupe des translations de $\tilde{X}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, donc n'a certainement pas la propriété (T). Cet exemple montre que l'hypothèse spectrale dans le Théorème 11 ne peut être améliorée.

2) Un groupe Γ s'appelle **groupe** $\tilde{A}_2$ s'il admet une action simplement transitive, permutant cycliquement le type des sommets, sur les sommets d'un immeuble épais de type $\tilde{A}_2$. Ces groupes ont été étudiés et

caractérisés par Cartwright-Mantero-Steger-Zappa [9] : la plupart peuvent être réalisés comme réseaux co-compacts dans PGL_3 d'un corps local non archimédien $\mathbb{K}$, mais pas tous : l'existence d'immeubles de type $\tilde{A}_2$ non classiques permet de construire des groupes $\tilde{A}_2$ qui ne sont *pas* des réseaux dans $PGL_3(\mathbb{K})$. Cartwright-Mlotkowski-Steger [10] ont montré, par un remarquable calcul direct, que tout groupe $\tilde{A}_2$ a la propriété (T) : pour la première fois, la propriété (T) était établie pour un groupe dénombrable sans faire appel à la théorie des réseaux dans les groupes algébriques simples sur les corps locaux [8]. Le Théorème 11 fournit une preuve simple du résultat de Cartwright-Mlotkowski-Steger : en effet un link de sommet d'un immeuble de type $\tilde{A}_2$ est le graphe d'incidence points-droites d'un plan projectif sur un corps fini : le calcul du spectre de ce graphe (voir Feit-Higman [19]) montre que le critère spectral est satisfait.

4.2 La propriété (T) sur ordinateur ?

Le Théorème 11 a ouvert une possibilité qui paraissait inimaginable il y a 10 ans : celle de vérifier la propriété (T) sur ordinateur ! En effet, si $\tilde{X}$ est un complexe simplicial de dimension 2 donné explicitement, avec des links pas trop grands et en petit nombre (à isomorphisme près), on peut envisager de vérifier le critère spectral en faisant calculer par la machine la plus petite valeur propre non nulle du laplacien combinatoire des links de $\tilde{X}$.

D'autre part, tout groupe de présentation finie admet une action propre, à quotient compact, sur un complexe simplicial simplement connexe de dimension 2 (à savoir le revêtement universel de la subdivision barycentrique du 2-complexe de présentation). Le Théorème 11 suggère que la propriété (T) pourrait se lire sur une présentation du groupe... Ballmann et Swiatkowski ([2], Corollaire 2) ont donné les premiers exemples de présentations de ce type :

Théorème 12 *Soient H un groupe fini, $S \subset H - \{1\}$ une partie génératrice de H, et $H = \langle S|R\rangle$ une présentation de H. On suppose que le graphe de Cayley $L = \mathcal{G}(H,S)$ a un tour de taille au moins égal à 6, et satisfait $\lambda_1(L) > \frac{1}{2}$. Alors le groupe Γ donné par la présentation*

$$\Gamma = \langle S \cup \{\tau\} | R \cup \{\tau^2\} \cup \{(s\tau)^3 : s \in S\}\rangle$$

[8]Comparer avec la preuve de Shalom [48] de la propriété (T) pour $SL_n(\mathbb{Z})$ ($n \geq 3$), qui n'utilise pas le fait que $SL_n(\mathbb{Z})$ est un réseau dans $SL_n(\mathbb{R})$.

est un groupe infini possédant la propriété (T). □

En fait, sous la seule hypothèse de tour de taille ≥ 6, le groupe Γ donné par la présentation du Théorème 12 agit proprement, avec quotient fini, sur un complexe simplicial contractile de dimension 2, dont tous les links de sommets sont isomorphes à $L = \mathcal{G}(H, S)$ ([2], Theorem 2). Ceci montre que Γ est infini. Le Théorème 12 découle alors du Théorème 11. Pour des exemples de graphes de Cayley de groupes finis satisfaisant les deux hypothèses du Théorème 12, voir [36].

A. Zuk est parvenu à abstraire les conditions du Théorème 11 pour donner une condition suffisante pour la propriété (T), qui ne dépend que d'une présentation d'un groupe (mieux : qui ne dépend que de certaines relations).

Soit Γ un groupe engendré par une partie S finie, symétrique ($S = S^{-1}$), avec $1 \notin S$. On définit un graphe $L(S)$ dont l'ensemble des sommets est S, et dont l'ensemble des arêtes est $\{\{s,t\} : s, t, s^{-1}t \in S\}$. Si $\Gamma = \langle T|R\rangle$ est une présentation de Γ, et $S = T \cup T^{-1}$, on voit que $L(S)$ ne dépend que des relations de longueur 3. Zuk démontre alors ([54], Theorem 1) :

Théorème 13 *Si le graphe $L(S)$ satisfait $\lambda_1(L(S)) > \frac{1}{2}$, alors Γ a la propriété (T).* □

La condition $\lambda_1(L(S)) > \frac{1}{2}$ implique que $L(S)$ est connexe. Remarquons qu'il n'est pas restrictif de supposer $L(S)$ connexe : en effet, en remplaçant S par la réunion des mots de longueur 1 et de longueur 2 sur S, on obtient une partie génératrice S' avec $L(S')$ connexe. Notons encore que, malgré certains reliquats cohomologiques, la preuve du Théorème 13 ne repose plus sur le théorème de Delorme-Guichardet, mais sur la définition originale de la propriété (T).

4.3 Applications

La condition suffisante du Théorème 13 s'avère particulièrement maniable. Par exemple, il résulte du Corollaire 2 (et de sa preuve) que, si $\Gamma = \langle T|R\rangle$ est une présentation d'un groupe de Kazhdan, il est possible d'extraire de l'ensemble R des relations un nombre fini $r_1, \ldots, r_n$ de relations, telles que $\tilde{\Gamma} = \langle T|r_1, \ldots, r_n\rangle$ possède la propriété (T). D'où la question : peut-on expliciter les relations qu'on peut supprimer de R, tout en assurant que le groupe correspondant a la propriété (T) ? Zuk ([54], Theorem 5) donne une réponse en ce qui concerne les relations de longueur 3 :

Théorème 14 *Soit Γ un groupe de type fini. Soit S une partie génératrice finie, symétrique, avec $1 \notin S$. On suppose que $\lambda_1(L(S)) > \frac{1}{2}$. Soit $t \in \mathbb{N}$ tel que $t \leq \frac{1}{11}(\lambda_1(L(S)) - \frac{1}{2}) \min\{\deg(s) : s \in L(S)\}$. En supprimant t relations de longueur 3 de toute présentation de Γ sur la partie génératrice S, on obtient un groupe qui possède la propriété (T).* $\square$

Zuk en déduit aussi la généricité des groupes de Kazhdan parmi les groupes donnés par une présentation à relations de longueur 3. Plus précisément, on considère les présentations P sur m générateurs $s_1, \ldots, s_m$, à $2mv$ relations de la forme

$$(s_j^{\pm 1} \sigma_1^i (s_j^{\pm 1}) \sigma_2^i (s_j^{\pm 1}))_{1 \leq i \leq v; 1 \leq j \leq m}$$

où $\sigma_1^1, \sigma_2^1, \ldots, \sigma_1^v, \sigma_2^v$ sont $2v$ permutations de l'ensemble $\{s_1, \ldots, s_m, s_1^{-1}, \ldots, s_m^{-1}\}$ à $2m$ éléments. On note $\Gamma(P)$ le groupe défini par cette présentation, et $\mathcal{P}(m, v)$ l'ensemble des présentations de ce type (deux présentations étant différentes si les permutations sont différentes). On a alors ([54], Theorem 12) :

Théorème 15 *Pour v assez grand :*

$$\lim_{m \to \infty} \frac{card\{P \in \mathcal{P}(m, v) : \Gamma(P) \text{ est de } Kazhdan\}}{card\, \mathcal{P}(m, v)} = 1$$

$\square$

Remerciements : Merci à Yehuda Shalom pour d'utiles conversations, et à mes co-auteurs Bachir Bekka et Pierre de la Harpe pour leur relecture attentive d'une première version de ce texte. La présentation suivie ici doit beaucoup à [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Alperin, *Locally compact groups acting on trees and property (T)*, Monatsh. Math., 93 (1982), pp. 261–265.

[2] W. Ballmann and J. Swiatkowski, *On L^2-cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, Geom. funct. anal., 7 (1997), pp. 615–645.

[3] H. Behr, *$SL_3(F_q[t])$ is not finitely presentable*, in Homological group theory, Proc. Symp., Durham 1977, Lond. Math. Soc. Lect. Notes Ser. 36, 1979, pp. 213–224.

[4] B. Bekka, P. de la Harpe, and A. Valette, *Kazhdan's property (T)*. Preprint, Juillet 2002.

[5] B. Bekka and A. Valette, *Group cohomology, harmonic functions and the first l^2-Betti number*, Potential analysis, 6 (1997), pp. 313–326.

[6] A. Borel, *Cohomologie de certains groupes discrets et laplacien p-adique (d'après H. Garland)*, in Sém. Bourbaki, exposé 437, 1973.

[7] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local I; données radicielles valuées*, Publ. Math. IHES, 41 (1972), pp. 5–251.

[8] M. Burger and N. Monod, *Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups*, J. Eur. Math. Soc., 1 (1999), pp. 199–235.

[9] D. Cartwright, A. Mantero, T. Steger, and A. Zappa, *Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type $\tilde{A}_2$*, Geometriae Dedicata, 47 (1993), pp. 143–166.

[10] D. Cartwright, W. Mlotkowski, and T. Steger, *Property (T) and $\tilde{A}_2$ groups*, Ann. Inst. Fourier, 44 (1993), pp. 213–248.

[11] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, and A. Valette, *Groups with the Haagerup property (Gromov's a-T-menability)*, Progress in Math., Birkhäuser, 2001.

[12] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic rigidity*, Ann. of Math., 135 (1992), pp. 165–182.

[13] M. Cowling, *Sur les coefficients des représentations des groupes de Lie simples*, in Analyse harmonique sur les groupes de Lie II, Springer Lect. Notes in Math. 739, 1979, pp. 132–178.

[14] P. de la Harpe and A. Valette, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts*, Astérisque 175, Soc. Math. France, 1989.

[15] C. Delaroche and A. Kirillov, *Sur les relations entre l'espace dual d'un groupe et la structure de ses sous-groupes fermés*, in Sém. Bourbaki, exposé 343, juin 1968, 1968.

[16] P. Delorme, *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles*, Bull. Soc. Math. France, 105 (1977), pp. 281–336.

[17] J. Faraut, *Analyse harmonique sur les paires de Guelfand et les espaces hyperboliques*, in Analyse harmonique, Cours du CIMPA, Nice, 1983, pp. 315–446.

[18] D. Farley, *Proper isometric actions of Thompson's groups on Hilbert space.* Preprint, 2002.

[19] W. Feit and G. Higman, *The nonexistence of certain generalized polygons*, J. Algebra, 1 (1964), pp. 114–131.

[20] A. Furman, *Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices*, Ann. of math., 150 (1999), pp. 1059–1081.

[21] H. Garland, *p-adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p-adic groups*, Ann. of math., 97 (1973), pp. 375–423.

[22] T. Gelander and A. Zuk, *Dependence of Kazhdan constants on generating subsets*, Israel J. of Math., 129 (2002), pp. 93–98.

[23] E. Ghys, *Actions de réseaux sur le cercle*, Invent. Math., 137 (1999), pp. 199–231.

[24] E. Ghys and V. Sergiescu, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, Comment. Math. Helv., 62 (1987), pp. 185–239.

[25] M. Gromov, *Random walk in random groups.* Preprint IHES, Jan. 2002.

[26] ——, *Hyperbolic groups*, in Essays in group theory (S.M. Gersten, ed.) , M.S.R.I. Publ. 8, Springer-Verlag, 75-263, 1987.

[27] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 76 (1992), pp. 165–246.

[28] A. Guichardet, *Sur la cohomologie des groupes topologiques II*, Bull. Sci. Math., 96 (1972), pp. 305–332.

[29] ——, *Cohomologie des groupes topologiques et des algèbres de Lie*, Cedic - F. Nathan, 1980.

[30] G. Hector and U. Hirsch, *The geometry of foliations, Part B*, Vieweg, 1983.

[31] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, 1963.

[32] A. Hulanicki, *Means and Følner condition on locally compact groups*, Studia Math., 24 (1966), pp. 87–104.

[33] J. Jost, *Equilibrium maps between metric spaces*, Calc. Var., 2 (1994), pp. 173–204.

[34] D. Kazhdan, *Connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups*, Funct. Anal. and its Appl., 1 (1967), pp. 63–65.

[35] B. Kostant, *On the existence and irreducibility of certain series of representations*, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), pp. 627–642.

[36] A. Lubotzky, *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures*, Progress in Math. 125, Birkhäuser, 1994.

[37] G. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Springer-Verlag, Ergeb. Math. Grenzgeb. 3 Folge, Bd. 17, 1991.

[38] N. Mok, *Harmonic forms with values in locally constant Hilbert bundles*, J. Fourier analysis and appl., (1995), pp. 433–453. Kahane special issue.

[39] A. Navas, *Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle.* Preprint, juin 2001.

[40] P. Pansu, *Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité*, in Sém. Bourbaki, exposé 778, juin 1993, 1993.

[41] ——, *Formules de Matsushima, de Garland, et propriété (T) pour des groupes agissant sur des espaces symétriques ou des immeubles*, Bull. Soc. math. France, 126 (1998), pp. 107–139.

[42] A. Pressley and G. Segal, *Loop groups*, Oxford Univ. Press, 1986.

[43] U. Rehmann and C. Soulé, *Finitely presented groups of matrices*, in Algebraic K-theory, Springer Lect. Notes in Math. 551, 1976, pp. 164–169.

[44] H. Reiter, *Some properties of locally compact groups*, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math, 27 (1965), pp. 697–701.

[45] A. Reznikov, *Analytic topology of groups, actions, strings and varieties.* Preprint, Jan. 2000.

[46] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames, SL_2*, Astérisque 46, Soc. Math. France, 1977.

[47] Y. Shalom, *Rigidity of commensurators and irreducible lattices*, Invent. Math., 141 (2000), pp. 1–54.

[48] ——, *Bounded generation and Kazhdan property (T)*, Publ. Math. IHES, 90 (2001), pp. 145–168.

[49] G. Skandalis, *Une notion de nucléarité en K-théorie*, K-theory, 1 (1988), pp. 549–573.

[50] L. Vaserstein, *Groups having the property (T)*, Funct. Anal. and its Appl., 2 (1968), p. 174.

[51] A. Vershik and S. Karpushev, *Cohomology of groups in unitary representations, the neighbourhood of the identity and conditionally positive definite functions*, Math. USSR Sbornik, 47 (1984), pp. 513–526.

[52] S. Wang, *The dual space of semi-simple Lie groups*, Amer. J. Math., 23 (1969), pp. 921–937.

[53] Y. Watatani, *Property (T) of Kazhdan implies property (FA) of Serre*, Math. Japon., 27 (1981), pp. 97–103.

[54] A. Zuk, *Property (T) and Kazhdan constants for discrete groups.* Preprint, juin 2002.

[55] ——, *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres*, C. R. Acad. Sci. Paris, 323 (1996), pp. 453–458.

Alain VALETTE

Institut de Mathématiques

Université de Neuchâtel

Rue Emile-Argand 11

CH-2007 NEUCHATEL

SUISSE

E-mail : alain.valette@unine.ch