Moyennabilité intérieure et extensions HNN

Yves Stalder*

12 juillet 2005

Abstract

We present sufficient conditions for HNN extensions to be inner amenable, respectively ICC, which apply to most Baumslag-Solitar groups. We deduce that such a group, viewed as acting on its Bass-Serre tree, contains non trivial elements which fix unbounded subtrees.

Résumé

On présente des conditions suffisantes pour qu'une extension HNN soit intérieurement moyennable, respectivement CCI, qui s'appliquent à la plupart des groupes de Baumslag-Solitar. On en déduit qu'un tel groupe, vu comme groupe d'automorphismes de son arbre de Bass-Serre, possède des éléments non triviaux qui fixent des sous-arbres non bornés.

Introduction

La notion de moyennabilité intérieure a été introduite par Effros dans [Ef75].[1] Il montre qu'un groupe à classes de conjugaison infinies (CCI) dont l'algèbre de von Neumann possède la propriété Gamma est intérieurement moyennable. L'article [BH86] donne une bonne introduction à la moyennabilité intérieure. Parmi les exemples de groupes intérieurement moyennables, on peut citer les groupes non CCI et les groupes moyennables. Jolissaint a

*Financé par le Fonds national suisse de la recherche scientifique, subside n° 20-101469

[1] Voir la section 1 pour les définitions.

montré dans [Jo97] que le groupe F de Thompson est intérieurement moyennable.

Tous les groupes considérés seront supposés être dénombrables et discrets. Étant donné un groupe G, on note $G^* = G \setminus \{1\}$ et $Z(G)$ le centre de G. Dans le présent article, nous nous intéressons à la propriété CCI et à la moyennabilité intérieure pour les extensions HNN.

Théorème 0.1 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $H \neq \Lambda$ ou $K \neq \Lambda$. Pour que Γ soit à classes de conjugaison infinies, il suffit que toute classe de conjugaison finie de Λ^* contienne un élément qui n'est point fixe d'aucun homomorphisme ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$).*

En particulier, si le groupe Λ est CCI ou si les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans points fixes non triviaux, le groupe Γ est à classes de conjugaison infinies.

Proposition 0.2 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$. Si pour tout $n \geqslant 1$ il existe $h_0^{(n)},\ h_1^{(n)}, \ldots, h_n^{(n)} \in (Z(\Lambda) \cap H \cap K)^*$ tels que $h_i^{(n)} = \phi(h_{i-1}^{(n)})$ pour $i = 1, \ldots, n$, alors Γ est intérieurement moyennable.*

On obtient ainsi des groupes intérieurement moyennables, non moyennables et CCI, par exemple la plupart des groupes de Baumslag-Solitar.

On donne également un énoncé que nous devons à Guyan Robertson et qui assure la propriété CCI pour certains groupes agissant sur des arbres (voir la proposition 2.8).

De la moyennabilité intérieure, on peut encore déduire des propriétés de l'action de certaines extensions HNN sur leur arbre de Bass-Serre :

Proposition 0.3 *Soit T un arbre et Γ un sous-groupe de $Aut(T)$ contenant des automorphismes hyperboliques transverses. Si Γ est intérieurement moyennable, il existe un élément elliptique de Γ qui fixe un sous-arbre non borné de T.*

Ce dernier énoncé s'applique également à la plupart des groupes de Baumslag-Solitar. Pour ces derniers, on peut d'ailleurs exhiber explicitement des éléments qui fixent des sous-arbres non bornés.

Structure de l'article La section 1 est consacrée aux rappels et définitions nécessaires, la section 2 à la propriété CCI et la section 3 à moyennabilité intérieure. Ces deux dernières sections sont agrémentées d'exemples. Enfin, la section 4 fait le lien entre moyennabilité intérieure et action sur les arbres.

Remerciements Je voudrais remercier Paul Jolissaint qui m'a incité à étudier la moyennabilité intérieure des groupes de Baumslag-Solitar, ainsi qu'Alain Valette, qui m'a montré le lemme 2.7 et la proposition 2.8, dus à Guyan Robertson. Je remercie également Pierre de la Harpe et Alain Valette pour leurs commentaires et suggestions relatifs aux versions préliminaires de ce texte.

1 Préliminaires

Moyennabilité intérieure et classes de conjugaison infinies Soit Γ un groupe (discret, dénombrable). Le groupe Γ agit sur Γ^* par conjugaison, ce qui s'exprime par la formule $\gamma \cdot x = \gamma x \gamma^{-1}$. Par abus de langage, on note encore γ l'application $x \mapsto \gamma \cdot x$.

Définition 1.1 *Un groupe* Γ *est dit* à classes de conjugaison infinies (CCI) *s'il est infini et si toutes les orbites de l'action précitée sont infinies, c'est-à-dire si pour tout* $x \in \Gamma^*$*, l'ensemble* $\{\gamma x \gamma^{-1} : \gamma \in \Gamma\}$ *est infini.*

Une *moyenne* sur Γ est une forme linéaire $m : \ell^\infty(\Gamma^*) \to \mathbb{C}$ positive (c'est-à-dire vérifiant $m(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$) et normalisée par $m(1) = 1$.

Définition 1.2 *Un groupe* Γ *est dit* intérieurement moyennable *si* $\Gamma = \{1\}$ *ou s'il existe une moyenne sur* Γ *qui soit invariante par automorphismes intérieurs, c'est-à-dire telle que* $m(f \circ \gamma^{-1}) = m(f)$ *pour tous* $\gamma \in \Gamma$ *et* $f \in \ell^\infty(\Gamma^*)$.

Un groupe non CCI est nécessairement intérieurement moyennable. En effet, si X est une partie finie non vide de Γ^* stable par conjugaison, il suffit de poser

$$m(f) = \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x)$$

pour obtenir une moyenne invariante par automorphismes intérieurs.

Extensions HNN Soit Λ un groupe, H, K des sous-groupes et $\phi : H \to K$ un isomorphisme. On définit l'*extension HNN* de *base* Λ relativement à H, K et ϕ comme dans [LS77, chapitre IV.2] :

$$HNN(\Lambda, H, K, \phi) = \left\langle \Lambda, t \;\middle|\; t^{-1}ht = \phi(h)\ \forall h \in H \right\rangle \ .$$

Pour tout $j \geqslant 1$, définissons comme suit des homomorphismes ϕ^j. On pose $\phi^1 = \phi$ (en particulier $\mathrm{Dom}(\phi^1) = \mathrm{Dom}(\phi) = H$). Pour $j \geqslant 2$, on définit récursivement

$$\mathrm{Dom}(\phi^j) = \phi^{-1}\big(\mathrm{Dom}(\phi^{j-1}) \cap K\big) \subseteq H \ ,$$

et naturellement $\phi^j(h) = \phi(\phi^{j-1}(h))$ pour tout $h \in \mathrm{Dom}(\phi^j)$.

Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ un élément de $HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $n \geqslant 0$, $\lambda_i \in \Lambda$ et $\varepsilon_i = \pm 1$. L'écriture est dite *réduite* si elle ne contient aucun sous-mot de type $t^{-1}ht$ avec $h \in H$ ou tkt^{-1} avec $k \in K$. L'énoncé suivant est une variante du théorème de la forme normale dans les extensions HNN [LS77, théorème IV.2.1], Nous nous y référerons (un peu abusivement) sous le nom de *lemme de Britton*.

Lemme 1.3 *Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ comme avant. Si l'écriture est réduite et si $\gamma = 1$, alors $n = 0$ et λ_0 est l'élément neutre de Λ.*

Grâce au lemme IV.2.3 de [LS77], on peut en outre définir une *fonction longueur* $\ell : HNN(\Lambda, H, K, \phi) \longrightarrow \mathbb{N}$ en posant $\ell(\gamma) = n$ si l'écriture $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ est réduite.

Groupes de Baumslag Solitar Ils sont définis par les présentations

$$BS(m, n) = \left\langle a, b \;\middle|\; ab^m a^{-1} = b^n \right\rangle$$

où m et n sont des entiers non nuls. Ce sont des extensions HNN du groupe $\mathbb{Z}$. Plus précisément, on a $BS(m, n) = HNN(\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, \phi)$ où $\phi : n\mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$ est défini par $\phi(nk) = mk$. On vérifie facilement que dans ce cas

$$\mathrm{Dom}(\phi^j) = n_1^j d\mathbb{Z} \ \text{ pour tout } j \geqslant 1 \ ,$$

où $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$ et $n_1 = \frac{n}{d}$.

Arbres et théorie de Bass-Serre Pour les définitions des notions de graphe et d'arbre, on renvoie le lecteur au chapitre I.2 de [Se77]. Un automorphisme d'arbre α est dit *sans inversion* si $\phi(e) \neq \bar{e}$ pour toute arête e. Étant donné un tel automorphisme, la proposition 25 de [Se77] montre que :

- soit α est *elliptique*, c'est-à-dire fixe au moins un sommet de l'arbre ;
- soit α est *hyperbolique*, c'est-à-dire tel qu'il existe une géodésique doublement infinie, appelée *axe*, sur laquelle α induit une translation d'amplitude non nulle.

Deux automorphismes hyperboliques sont dits *transverses* si leurs axes n'ont qu'un nombre fini (éventuellement nul) de sommets en commun.

Étant donné une extension $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, l'*arbre de Bass-Serre* associé est le graphe donné par

$$Som(T) = \Gamma/\Lambda \ ; \ Ar(T) = \Gamma/H \sqcup \Gamma/K \ ; \ \overline{\gamma H} = \gamma t K \ ; \ \overline{\gamma K} = \gamma t^{-1} H \ ;$$

$$(\gamma H)^- = \gamma\Lambda \ ; \ (\gamma H)^+ = \gamma t \Lambda \ ; \ (\gamma K)^+ = \gamma\Lambda \ ; \ (\gamma K)^+ = \gamma t^{-1}\Lambda$$

où, étant donné une arête e, on note e^- son origine et e^+ son sommet terminal. Le chapitre I.5 de [Se77] et le théorème 12 en particulier assurent qu'il s'agit bien d'un arbre.[2] On peut orienter T de manière à ce que l'action évidente de Γ sur T préserve l'orientation en posant

$$Ar_+(T) = \Gamma/H \ ; \ (\gamma H)^- = \gamma\Lambda \ ; \ (\gamma H)^+ = \gamma t\Lambda \ .$$

Relevons que cet arbre orienté est doublement régulier : en chaque sommet de T les arêtes sortantes sont en bijection avec Λ/H tandis que les arêtes entrantes sont en bijection avec Λ/K.

2 Classes de conjugaison infinies

Le premier objectif de cette section est de prouver le théorème 0.1. On traite séparément les éléments de la base de l'extension HNN et les autres.

Lemme 2.1 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$, avec $H \neq \Lambda$ ou $K \neq \Lambda$. Pour tout $\gamma \in \Gamma \setminus \Lambda$, la classe de conjugaison de γ dans Γ est infinie.*

[2] Il convient de remarquer que la définition d'extension HNN dans [Se77] ne correspond pas à la nôtre qui est celle de [LS77] (on passe de l'une à l'autre en remplaçant t par t^{-1}).

Preuve. On traite le cas $K \neq \Lambda$, laissant la vérification du cas analogue $H \neq \Lambda$ au lecteur.

Soit $\gamma = \lambda_0 t^{\varepsilon_1} \lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_n} \lambda_n$ une écriture réduite (avec $n \geqslant 1$) et soit C la classe de conjugaison de γ. Il suffit d'exhiber une suite (γ_j) d'éléments de C telle que $\lim_{j\to\infty} \ell(\gamma_j) = +\infty$.

Si $\varepsilon_1 = -1$, on trouve $\sigma \in \Lambda$ tel que $\sigma\lambda_0 \notin K$ grâce à l'hypothèse $\Lambda \neq K$. On pose ensuite

$$\gamma_1 = t^{-\varepsilon_n} \sigma\gamma\sigma^{-1} t^{\varepsilon_n} = t^{-\varepsilon_n}(\sigma\lambda_0)t^{-1}\lambda_1 t^{\varepsilon_2}\lambda_2 \cdots t^{\varepsilon_n}(\lambda_n\sigma^{-1})t^{\varepsilon_n}$$

et la dernière écriture est réduite par construction. Il suffit alors de poser $\gamma_j = t^{-\varepsilon_n}\gamma_{j-1}t^{\varepsilon_n}$ pour $j \geqslant 2$ car il vient $\ell(\gamma_j) = n + 2j \to \infty$ pour $j \to \infty$.

Si $\varepsilon_n = 1$, on trouve $\tau \in \Lambda$ tel que $\lambda_n\tau \notin K$ grâce à l'hypothèse $\Lambda \neq K$. On pose ensuite

$$\gamma_1 = t^{\varepsilon_1}\tau^{-1}\gamma\tau t^{-\varepsilon_1} = t^{\varepsilon_1}(\tau^{-1}\lambda_0)t^{\varepsilon_1}\lambda_1 \cdots t^{\varepsilon_{n-1}}\lambda_{n-1}t(\lambda_n\tau)t^{-\varepsilon_1}$$

et la dernière écriture est réduite par construction. Il suffit alors de poser $\gamma_j = t^{\varepsilon_1}\gamma_{j-1}t^{-\varepsilon_1}$ pour $j \geqslant 2$ car il vient $\ell(\gamma_j) = n + 2j \to \infty$ pour $j \to \infty$.

Enfin, si $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_n = -1$, il suffit de poser $\gamma_j = t^j\gamma t^{-j}$ pour obtenir $\ell(\gamma_j) = n + 2j \to \infty$ pour $j \to \infty$. □

Lemme 2.2 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ et soit $\gamma \in \Lambda^*$. On note C_Γ (respectivement C_Λ) la classe de conjugaison de γ dans Γ (respectivement Λ). Pour que la classe C_Γ soit infinie, il suffit qu'une au moins des conditions suivantes soit satisfaite :*

- *(a) la classe C_Λ est infinie ;*
- *(b) la classe C_Λ contient un élément qui n'est point fixe d'aucun homomorphisme ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$).*

On convient qu'un élément situé hors du domaine de ϕ^j n'est pas un point fixe de cet homomorphisme.

Preuve. Si C_Λ est infinie, il en est de même de C_Γ car $C_\Lambda \subseteq C_\Gamma$.

S'il existe un élément c de C_Λ qui n'est point fixe d'aucun ϕ^j (pour $j \in \mathbb{N}^*$), on a $t^{-n}ct^n \neq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, la relation $t^{-n}ct^n = c$ impliquerait $\phi^n(c) = c$ grâce au lemme de Britton. Par conséquent, l'ensemble $\{t^{-n}ct^n : n \in \mathbb{N}\}$ est infini. Comme il est inclus dans la classe C_Γ, cette dernière est également infinie. □

Preuve du théorème 0.1. Soit $\gamma \in \Gamma^*$. Si $\gamma \in \Gamma \setminus \Lambda$ (respectivement $\gamma \in \Lambda^*$), le lemme 2.1 (respectivement le lemme 2.2) implique que sa classe de conjugaison est infinie. $\square$

On va maintenant montrer qu'on peut s'affranchir de l'hypothèse « $H \neq \Lambda$ ou $K \neq \Lambda$ » si on renforce les hypothèses sur ϕ.

Corollaire 2.3 *Soit $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$. Si Λ est non trivial et si les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans points fixes non triviaux, alors Γ est CCI.*

Preuve. Par le théorème 0.1, il ne reste que le cas $H = \Lambda = K$ à traiter. Tout élément de Γ peut alors s'écrire sous la forme λt^n avec $\lambda \in \Lambda$ et $n \in \mathbb{Z}$. Supposons par l'absurde qu'il existe un élément $\gamma \in \Gamma^*$ dont la classe de conjugaison est finie.

On peut supposer que $\gamma = \lambda t^n$ avec $\lambda \in \Lambda^*$. En effet, si $\gamma = t^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$, on prend $\mu \in \Lambda^*$ (ce qui est licite car Λ est non trivial) et on n'a plus qu'à remplacer γ par $\mu^{-1}\gamma\mu = \mu^{-1}\phi^{-n}(\mu)t^n$ puisque ϕ^{-n} est sans points fixes non triviaux. (Remarquons que la définition des itérés de ϕ ne pose pas de problème ici puisqu'il s'agit d'un automorphisme de Λ.)

Comme la classe de conjugaison de γ est finie, il en est de même de l'ensemble $\{t^{-j}\gamma t^j : j \in \mathbb{N}\} = \{\phi^j(\lambda)t^n : j \in \mathbb{N}\}$, ce qui montre qu'il existe $j \in \mathbb{N}^*$ tel que $\phi^j(\lambda) = \lambda$. On a obtenu la contradiction cherchée (avec les hypothèses). $\square$

On passe maintenant à des exemples d'extensions HNN à classes de conjugaison infinies. Bien que nous n'en ayons pas trouvé trace dans la littérature, ils sont peut-être déjà connu des experts.

Exemple 2.4 *Étant donnés deux entiers non nuls m et n, le groupe de Baumslag-Solitar $BS(m,n)$ est CCI si et seulement si $|m| \neq |n|$.*

Preuve. Si $m = n$, l'élément b^m est central dans $BS(m,m)$ et donc seul dans sa classe de conjugaison. Si $m = -n$, l'ensemble $\{b^m, b^{-m}\}$ est une classe de conjugaison finie.

Si $|m| \neq |n|$, le théorème 0.1 implique que $BS(m,n)$ est CCI. En effet, les homomorphismes ϕ^j associés à la structure d'extension HNN de $BS(m,n)$ sont sans points fixes non triviaux. $\square$

Exemple 2.5 *Si $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ avec $\Lambda = \mathbb{Z}^d = H$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) le groupe Γ est CCI ;

(ii) les valeurs propres (complexes) de l'endomorphisme ϕ ne sont pas des racines de l'unité.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$: Par contraposition, supposons que ϕ possède une valeur propre μ telle que $\mu^j = 1$ ($j \in \mathbb{N}^*$). Comme 1 est valeur propre de ϕ^j, celui-ci possède un point fixe non nul dans $\mathbb{Q}^d$. Il possède donc aussi un point fixe non nul dans $\mathbb{Z}^d$, qu'on note λ. Par suite, l'ensemble $\{\lambda, \phi(\lambda), \dots, \phi^{j-1}(\lambda)\}$ est une classe de conjugaison finie de Γ.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme ϕ^j est sans points fixes non triviaux car 1 n'en est pas valeur propre. Le corollaire 2.3 assure donc que Γ est CCI. □

Nous donnons maintenant un dernier exemple, qui montre que la condition du théorème 0.1 n'est pas nécessaire.

Exemple 2.6 *Posons $\Lambda = BS(m,m)$, avec $m \in \mathbb{Z}, |m| \geqslant 2$. Les éléments a et b^m engendrent un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, qu'on note H. On considère $\Gamma = HNN(\Lambda, H, H, \phi)$, où $\phi : H \to H$ est défini par $\phi(a) = b^m$ et $\phi(b^m) = a$.*

(1) Le groupe Γ est CCI.

(2) Il existe une classe de conjugaison finie de Λ^* dont tous les éléments sont des points fixes d'homomorphismes de la forme ϕ^j.

Preuve. (1) Soit γ un élément de Γ dont la classe de conjugaison est finie. On doit montrer que $\gamma = 1$. Par le lemme 2.1, γ est un élément de Λ. Mais on peut écrire $\Lambda = HNN(\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}, \mathrm{id})$, où la base $\mathbb{Z}$ correspond au sous-groupe engendré par b. À nouveau grâce au lemme 2.1 on a $\gamma = b^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Si n n'est pas multiple de m, l'élément γ n'est point fixe d'aucun homomorphisme id^j (ils ne sont pas définis en γ). Par le lemme 2.2, on obtient donc $\gamma = b^{\ell m}$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$. Par suite, $t^{-1}\gamma t = a^\ell$, ce qui montre que la classe de conjugaison de a^ℓ est finie. On obtient alors $\ell = 0$ grâce au lemme 2.1, ce qui donne finalement $\gamma = 1$ comme désiré.

(2) L'élément b^m est central dans Λ. Il est donc seul dans sa classe de conjugaison. De plus, $\phi^2(b^m) = b^m$. □

Les deux énoncés suivants, dus à Guyan Robertson, montrent plus généralement que certains groupes d'automorphismes d'arbres sont à classes de conjugaison infinies.

Lemme 2.7 *Soit Γ un groupe agissant fidèlement et isométriquement sur un espace métrique (X, d) de telle manière que le quotient $\Gamma \backslash X$ soit fini. Si γ est un élément de Γ dont la classe de conjugaison est finie, alors il existe $K_\gamma > 0$ tel que $d(x, \gamma x) \leqslant K_\gamma$ pour tout $x \in X$.*

PREUVE. Soit $F \subseteq X$ un ensemble de représentants des orbites ; cet ensemble est fini. La classe de conjugaison de γ étant finie, on peut poser

$$K_\gamma = \max\{d(y, g\gamma g^{-1} y) : g \in \Gamma, y \in F\} .$$

Si x est un élément quelconque de X, on trouve g dans Γ et y dans F tels que $y = gx$. Alors $d(x, \gamma x) = d(g^{-1} y, \gamma g^{-1} y) = d(y, g\gamma g^{-1} y) \leqslant K_\gamma$. $\square$

Proposition 2.8 *Soit X un arbre dont tous les sommets ont au moins trois voisins. Si un groupe Γ agit fidèlement sur X de telle manière que le quotient $\Gamma \backslash X$ soit fini, alors il est CCI.*

PREUVE. Soit γ un élément de Γ dont la classe de conjugaison est finie. On veut montrer que $\gamma = 1$. Comme l'action est fidèle, il suffit de montrer que γ agit trivialement sur X.

On commence par supposer (par l'absurde) que l'élément γ est hyperbolique. Comme tout sommet de X a au moins trois voisins, on peut trouver un sommet x_n à distance n de l'axe pour tout $n \geqslant 1$. Mais alors, $d(x_n, \gamma x_n) \geqslant 2n$, ce qui contredit le lemme 2.7.

Par conséquent, γ fixe au moins un sommet de X. Notons T le sous-arbre de X formé des points fixes de γ. On suppose par l'absurde que $T \neq X$. Dans ce cas, comme tout sommet est de degré au moins trois, on trouve x_n à distance n de T pour tout $n \geqslant 1$. Comme γ ne fixe aucun sommet de la géodésique joignant x_n à T, on a $d(x, \gamma x) = 2n$ pour tout n, ce qui contredit le lemme 2.7.

Ainsi, $T = X$, ce qui signifie que γ agit trivialement sur X. $\square$

Terminons par un exemple d'extension HNN montrant que le théorème 0.1 n'est pas conséquence de la proposition 2.8.

Exemple 2.9 *Considérons le groupe $\Lambda = \mathbb{F}_2 \times (\oplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})$, de présentation*

$$\Lambda = \left\langle a, b, e_i \ (i \in \mathbb{Z}) \ \middle| \ [a, e_i], [b, e_i], [e_i, e_j] \ (i, j \in \mathbb{Z}) \right\rangle .$$

Soit H le sous-groupe engendré par les e_i et $\phi : H \to H$ l'homomorphisme donné par la formule $\phi(e_i) = e_{i+1}$. Soit encore $\Gamma = HNN(\Lambda, H, H, \phi)$.

Alors les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans points fixes non triviaux (en particulier Γ est CCI par le théorème 0.1), mais l'action de Γ sur son arbre de Bass-Serre n'est pas fidèle.

PREUVE. Il est évident que les homomorphismes ϕ^j (avec $j \in \mathbb{N}^*$) sont sans points fixes non triviaux. D'autre part, le sous-groupe H est normal dans Γ par construction. Notons T l'arbre de Bass-Serre de Γ. On a $Ar_+(T) = \Gamma/H$, de sorte que le sous-groupe H fixe toutes les arêtes de l'arbre de Bass-Serre. Ainsi, l'action de Γ sur T n'est pas fidèle. $\square$

3 Moyennabilité intérieure

Nous nous intéressons maintenant à montrer que certaines extensions HNN sont intérieurement moyennables. La preuve qui suit s'inspire du corollaire 2.5. de [Jo97].

PREUVE DE LA PROPOSITION 0.2. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que le groupe Γ est CCI. Il s'ensuit que pour tout n, les éléments $h_0^{(n)}, \ldots, h_n^{(n)}$ sont deux à deux distincts. En effet, si $h_i^{(n)} = h_j^{(n)}$ (avec $i < j$), l'ensemble $\{h_i^{(n)}, \ldots h_{j-1}^{(n)}\}$ est une classe de conjugaison finie.

Nous allons construire une moyenne sur Γ qui soit invariante par automorphismes intérieurs. Soit ω un ultrafiltre sur $\mathbb{N}^*$ plus fin que le filtre de Fréchet[3]. On pose pour $f \in \ell^\infty(\Gamma^*)$:

$$\begin{aligned} \mu_n(f) &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(h_i^{(n)}) \quad (n \in \mathbb{N}^*) \\ \mu_\omega(f) &= \lim_{n \to \omega} \mu_n(f) \ . \end{aligned}$$

La limite existe car la suite $(\mu_n(f))_n$ est bornée et ω est un ultrafiltre. La forme linéaire μ_ω sur $\ell^\infty(\Gamma^*)$ est positive et normalisée. Il reste à voir qu'elle est invariante par automorphismes intérieurs. Comme Γ est engendré par Λ et t, cela revient à montrer :

(1) $\mu_\omega(f \circ S_\lambda) = \mu_\omega(f)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, où $S_\lambda(\gamma) = \lambda^{-1}\gamma\lambda$;

(2) $\mu_\omega(f \circ T) = \mu_\omega(f)$, où $T(\gamma) = t^{-1}\gamma t$.

[3] Il est équivalent de demander que ω soit un ultrafiltre libre.

Comme les $h_i^{(n)}$ sont centraux dans Λ, on a $S_\lambda(h_i^{(n)}) = h_i^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$. Cela montre (1). Pour montrer (2), on constate d'abord que :

$$\begin{aligned}
\mu_n(f \circ T) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ T(h_i^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(t^{-1}h_i^{(n)}t) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f \circ \phi(h_i^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(h_{i+1}^{(n)}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(h_i^{(n)}) = \mu_n(f) + \frac{1}{n}\big(f(h_n^{(n)}) - f(h_0^{(n)})\big)
\end{aligned}$$

Comme ω est plus fin que le filtre de Fréchet, le dernier terme tend vers 0 selon ω. Il suit que $\mu_\omega(f \circ T) = \mu_\omega(f)$. □

Remarque 3.1 *Pour prouver la proposition 0.2, il est plus rapide de vérifier la condition (F) du théorème 1 de [BH86]. On suppose comme avant que Γ est CCI, de sorte que les $h_i^{(n)}$ sont deux à deux distincts. On constate alors qu'on peut prendre $F_n = \{h_1^{(n)}, \ldots, h_{n-1}^{(n)}\}$ pour $n \geqslant 2$. En effet $|\lambda F_n \lambda^{-1} \vartriangle F_n| = 0$ pour $\lambda \in \Lambda$ et $|t^{\pm 1} F_n t^{\mp 1} \vartriangle F_n| = 2$. Par suite, $|\gamma F_n \gamma^{-1} \vartriangle F_n| \leqslant 2\ell(\gamma)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $n \geqslant 2$. Pout tout $\gamma \in \Gamma$ il vient donc*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\gamma F_n \gamma^{-1} \vartriangle F_n|}{|F_n|} = 0 \ .$$

L'exemple suivant infirme la proposition 4.3 de [BeCe00].[4]

Exemple 3.2 *Le groupe $BS(m,n)$ est intérieurement moyennable quels que soient les entiers non nuls m et n.*

Preuve. Le groupe $BS(m,n)$ étant une extension HNN, il suffit de vérifier qu'on peut appliquer la proposition 0.2. Pour tout $k \geqslant 1$, il suffit de poser $h_i^{(k)} = b^{m^{i+1}n^{k-i+1}}$ pour obtenir $h_i^{(k)} = \phi(h_{i-1}^{(k)})$ pour tout $i = 1, \ldots, k$. En outre, la base étant commutative, ces éléments sont bien centraux. □

Exemple 3.3 *Si Λ est abélien et si $H = \Lambda$, alors $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ est intérieurement moyennable.*

[4]Pour démontrer leur énoncé, les auteurs ont voulu utiliser la proposition 7 de [BH86]. Dans la vérification des hypothèses, ils ont supposé à tort que les éléments du groupe définissant des automorphismes elliptiques de l'arbre de Bass-Serre fixaient un unique sommet. Voir aussi l'exemple 4.2

Preuve. Si Λ est trivial, on a $\Gamma = \mathbb{Z}$ et ce groupe est intérieurement moyennable. Sinon, il suffit de prendre $\lambda \in \Lambda^*$ et de poser $h_i^{(n)} = \phi^i(\lambda)$ pour pouvoir appliquer la proposition 0.2 $\square$

Nous terminons cette section en donnant des exemples qui infirment les points (d) et (e) du théorème 5 de [BH86][5], qui donnaient des obstructions à la moyennabilité intérieure pour des groupes du type $\Gamma = H *_A K$, respectivement $\Gamma = HNN(H, A, B, \phi)$.

De nouvelles obstructions à la moyennabilité intérieure pour les extensions HNN et produits amalgamés peuvent par contre être obtenues en appliquant la proposition 0.3 à l'action sur leur arbre de Bass-Serre.

Remarque 3.4 *L'hypothèse principale des points (d) et (e) dans [BH86] était : « pour toute partie finie $F \subseteq \Gamma^*$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma F \gamma^{-1} \cap A = \varnothing$ ». Géométriquement parlant, cette condition assure que les actions des groupes sur leur arbre de Bass-Serre et sur le bord de ce dernier sont fortement fidèles. Voir par exemple le lemme 9, sa preuve et la remarque précédent la proposition 11 dans [Ha85]*

Le groupe $BS(2,3)$ fournit un contre-exemple au point (e). En effet, on a vu dans l'exemple 3.2 que ce groupe est intérieurement moyennable tandis que le lemme qui suit montre que les hypothèses de (e) sont satisfaites.

Lemme 3.5 *Si $\Gamma = HNN(\Lambda, H, K, \phi)$ est tel que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $\phi^k(\lambda) \notin H$, alors pour toute partie finie F de Γ^* et pour n suffisamment grand, on a $t^{-n} F t^n \cap \Lambda = \varnothing$.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour tout $\gamma \in \Gamma^*$ et pour n suffisamment grand, on a $t^{-n}\gamma t^n \notin \Lambda$. On prend donc $\gamma \in \Gamma^*$ et on suppose pour éviter la trivialité qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ avec $t^{-n_0}\gamma t^{n_0} \in \Lambda$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\gamma_n = t^{-n_0-n}\gamma t^{n_0+n}$. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\gamma_k \in \Lambda \setminus H$. Les écritures $\gamma_{k+n} = t^{-n}\gamma_k t^n$ sont alors réduites pour tout $n \geqslant 1$. Donc pour $n > n_0 + k$, on a bien $t^{-n}\gamma t^n \notin \Lambda$. $\square$

Le contre-exemple au point (d) est le suivant :

[5]Dans cet article également, les auteurs ont supposé à tort que les éléments elliptiques (pour l'action sur l'arbre de Bass-Serre associé) fixaient un seul sommet. Dans le cas (c) du théorème visé, par contre, cette hypothèse est vérifiée car les stabilisateurs des arêtes sont triviaux.

Exemple 3.6 *Considérons le groupe*

$$\Gamma = \left\langle a_1, a_2, b \mid a_1 b^2 a_1^{-1} = b^3, a_2 b^2 a_2^{-1} = b^3 \right\rangle = BS(2,3) *_{\mathbb{Z}} BS(2,3) \ :$$

(1) il est intérieurement moyennable ;

(2) pour tout ensemble fini F d'éléments de Γ^*, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma F \gamma^{-1} \cap \langle b \rangle = \varnothing$.

Preuve. (1) Il est facile de voir que la suite de parties

$$F_n = \{b^{2^n}, b^{2^{n-1}\cdot 3}, \ldots, b^{2\cdot 3^{n-1}}, b^{3^n}\}$$

satisfait la condition (F) du théorème 1 de [BH86].

(2) On se donne $g \in \Gamma^*$. Il suffit de montrer que, pour n suffisamment grand, l'élément $(a_1a_2)^n g (a_1a_2)^{-n}$ n'est pas une puissance de b. Pour écarter le cas trivial, on peut supposer qu'il existe n_0 tel que $(a_1a_2)^{n_0} g (a_1a_2)^{-n_0}$ soit une puissance de b. Vu les relations qui définissent Γ il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $(a_1a_2)^{n_1} g (a_1a_2)^{-n_1} = b^k$ avec k non divisible par 4. On aura dès lors :

$$\begin{array}{rcll} (a_1a_2)^{n_1+1} g (a_1a_2)^{-n_1-1} & = & a_1 b^{3\frac{k}{2}} a_1^{-1} & \text{si } k \text{ est pair ;} \\ (a_1a_2)^{n_1+1} g (a_1a_2)^{-n_1-1} & = & a_1 a_2 b^k a_2^{-1} a_1^{-1} & \text{si } k \text{ est impair.} \end{array}$$

Les expressions $a_1 b^{3\frac{k}{2}} a_1^{-1}$ et $a_2 b^k a_2^{-1}$ ne sont pas réductibles dans $BS(2,3)$ (par le lemme de Britton). Pour $n > n_1 + 1$, l'élément $(a_1a_2)^n g (a_1a_2)^{-n}$ n'est donc pas une puissance de b [LS77, théorème IV.2.6]. □

4 Moyennabilité intérieure et arbres

Étant donné un arbre T, on note ∂T l'espace des bouts de T. Remarquons que les automorphismes de T définissent des homéomorphismes de l'espace $T \cup \partial T$. De plus un automorphisme de T est hyperbolique si et seulement s'il définit un homéomorphisme hyperbolique de $T \cup \partial T$ au sens de [BH86, pp. 151–152]. Notons également que deux automorphismes hyperboliques de T sont transverses au sens de la section 1 si et seulement si les homéomorphismes hyperboliques de $T \cup \partial T$ associés sont transverses au sens de [BH86]. Le lien entre homéomorphismes hyperboliques et moyennabilité intérieure est le suivant :

Proposition 4.1 *[BH86, proposition 7] Soit Ω un espace topologique séparé infini et Γ un groupe d'homéomorphismes de Ω. Si Γ contient des homéomorphismes hyperboliques transverses de Ω et s'il existe une application Γ-équivariante $\delta : \Gamma^* \to \Omega$ (où Γ opère sur Γ^* par conjugaison), alors Γ n'est pas intérieurement moyennable.*

Rappelons en outre que les arbres sont des espaces métriques complets satisfaisant l'inégalité de la médiane [HV89, chapitre 3.b]. Le lemme 3.8 de [HV89] assure que toute partie bornée et non vide d'un arbre possède un *centre*, qui est le centre de la boule fermée de rayon minimal qui la contienne.

Preuve de la proposition 0.3. Quitte à remplacer T par sa subdivision barycentrique, on peut supposer que Γ agit sans inversion.

Par contraposition, on suppose que, pour tout élément elliptique γ de Γ, le sous-arbre T_γ formé des points fixes de γ est borné. L'existence d'éléments hyperboliques implique que T n'est pas réduit à un sommet. Ainsi $\Omega = T \cup \partial T$ est un espace topologique séparé infini. Considérons l'application $\delta : \Gamma^* \longrightarrow \Omega$, définie comme suit :

- Si γ est hyperbolique, $\delta(\gamma)$ est le point attractif de γ ;
- Si γ est elliptique, $\delta(\gamma)$ est le centre de T_γ.

Si on fait agir Γ sur Γ^* par automorphismes intérieurs, l'application δ est Γ-équivariante. Grâce à la proposition 4.1, on en déduit que Γ n'est pas intérieurement moyennable, ce qui contredit les hypothèses. $\square$

Exemple 4.2 *Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}^*$, il existe $\gamma \in BS(m,n)$ tel que γ fixe un sous-arbre non borné de l'arbre de Bass-Serre associé.*

Preuve. Remarquons pour commencer que, dans le cas qui nous occupe, l'arbre de Bass-Serre est localement fini. Les sous-arbres non bornés coïncident donc avec les sous-arbres infinis. On distingue trois cas.

(1) Si $m = kn$ avec $k \in \mathbb{Z}^*$, on peut prendre

$$\gamma = b^n = ab^m a^{-1} = ab^{kn} a^{-1} = a^2 b^{km} a^{-2} = a^2 b^{k^2 n} a^{-2} = \dots$$

On a $\gamma = a^\ell b^{k^\ell n} a^{-\ell}$ $\forall \ell \in \mathbb{N}$. L'élément γ fixe (au moins) les sommets $a^\ell \langle b \rangle$ où ℓ parcourt $\mathbb{N}$ et donc un sous-arbre non borné de T.

(2) Si $n = km$ on constate de manière analogue que $\gamma = b^m$ fixe les sommets $a^{-\ell} \langle b \rangle$ où ℓ parcourt $\mathbb{N}$.

(3) Si les nombres m et n ne sont pas multiples l'un de l'autre (en particulier on a $|m|, |n| \geqslant 2$), on prend $\gamma = b^n$. Remarquons que

$$(aba^{-1}b^{-1})^{\ell}\gamma(aba^{-1}b^{-1})^{-\ell} = \gamma \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N} .$$

Par suite, γ fixe tous les sommets $(aba^{-1}b^{-1})^k \langle b \rangle$. Les expressions $(aba^{-1}b^{-1})^k$ étant réduites, le lemme de Britton implique que ces sommets dont distincts deux à deux. L'élément γ fixe donc un sous-arbre non borné. $\square$

Remarque 4.3 *On laisse le soin au lecteur de vérifier par lui-même que la proposition 0.3 s'applique si* $|m|, |n| \geqslant 2$.

Références

[BeCe00] C. Béguin et T. Ceccherini-Silberstein. Formes faibles de moyennabilité pour les groupes à un relateur. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 7 :135–148, 2000.

[BH86] E. Bédos et P. de la Harpe. Moyennabilité intérieure des groupes : définitions et exemples. *Enseign. Math*, 32 :139–157, 1986.

[Ef75] E. G. Effros. Property Γ and inner amenability. *Proc. Amer. Math. Soc*, 47 :483–486, 1975.

[Ha85] P. de la Harpe. *Reduced C^*-algebras of discrete groups which are simple with a unique trace.* Lecture notes in Math 1132, 139–157, Springer, 1986.

[HV89] P. de la Harpe et A. Valette. *La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts.* Astérisque 175, Société mathématique de France, 1989.

[Jo97] P. Jolissaint. Moyennabilité intérieure du groupe F de Thompson. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, 325 :61–64, 1997.

[LS77] R. C. Lyndon, P. E. Schupp. *Combinatorial Group Theory.* Springer-Verlag, 1977. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 89.

[Se77] J. P. Serre *Arbres, amalgammes, SL_2.* Astérisque 46, Société mathématique de France, 1977.

Adresse de l'auteur :

Institut de Mathématiques - Université de Neuchâtel
Rue Emile Argand 11
CH-2007 Neuchâtel - SUISSE

yves.stalder@unine.ch
Tél : +41 32 718 28 17 ; Fax : +41 32 718 28 01