L'algorithme de Voronoï jusqu'en dimension 6 : Table des contacts et des formes eutactiques d'indice 1

François Sigrist

1 Introduction

L'algorithme de Voronoï pour la classification des formes quadratiques parfaites a été appliqué jusqu'en dimension 5 par Voronoï lui-même [Vo], en dimension 6 par Barnes en 1957 [Ba], et finalement en dimension 7 par Jaquet en 1991 [Ja].

Les graphes de contiguïté sont donnés aux pages $217-218$ du livre de Martinet [Ma], mais il m'a semblé pertinent de donner jusqu'en dimension 6 la structure fine, en indiquant le nombre de faces contenues dans chaque orbite sous le groupe des automorphismes. J'ai évidemment renoncé à faire figurer la dimension 7, à cause des 157 orbites de voisines de E_7, en renvoyant aux calculs originaux de Jaquet. J'ai en revanche recalculé indépendamment toutes les données des autres graphes. Les calculs se trouvent dans divers travaux de Jaquet, et les tables ci-dessous n'ont pas d'autre prétention que de regrouper des informations actuellement éparses. De plus, la détermination des formes eutactiques d'indice 1, correspondant à chaque contact, est un exercice de pure routine grâce au résultat de [B-M] : la forme eutactique d'indice 1 est située sur le chemin de Voronoï au maximum du déterminant. La liste donne pour chaque forme la matrice, ainsi que les invariants habituels.

Les notations pour les formes sont celles de [C-S], et on remarquera pour contrôle que les tableaux jouissent d'une "symétrie" particulière, pondérée qu'elle est par la taille des groupes d'automorphismes. Cette formule de "doubles classes", très utile pour les recoupements des calculs faits par ordinateur, est dans [Ja].

2 Tables

Dimension 2		P_2^1 A_2
	Aut.	12
P_2^1 A_2	12	3

Dimension 3		P_3^1 A_3
	Aut.	48
P_3^1 A_3	48	6

Dimension 4			P_4^1 D_4	P_4^2 A_4
		Aut.	1152	240
P_4^1	D_4	1152	48	16
P_4^2	A_4	240	10	0

Dimension 5			P_5^1 D_5	P_5^2 A_5^3	P_5^3 A_5
		Aut.	3840	1440	1440
P_5^1	D_5	3840	80 240	40	40
P_5^2	A_5^3	1440	15	0	0
P_5^3	A_5	1440	15	0	0

Dimension 6			P_6^1 E_6	P_6^2 E_6^*	P_6^3 D_6	P_6^4 $A_{6,2}$	P_6^5 $A_6^{(2)}$	P_6^6	P_6^7 A_6
		Aut.	103680	103680	46080	288	672	96	10080
P_6^1	E_6	103680	135 1440 6480	45	432 2592 3240	3240 4320	3240	12960	0
P_6^2	E_6^*	103680	45	0	216	360	0	0	0
P_6^3	D_6	46080	192 1152 1440	96	960	960	0	1440	96
P_6^4	$A_{6,2}$	288	9 12	1	6	0	0	18	0
P_6^5	$A_6^{(2)}$	672	21	0	0	0	0	0	0
P_6^6		96	12	0	3	6	0	0	0
P_6^7	A_6	10080	0	0	21	0	0	0	0

3 Liste des formes eutactiques

La forme P_6^4 n'est pas extrême, comme l'avait déjà découvert Voronoï dans son article.

"Ce n'est quà partir des formes positives à six variables que j'ai rencontré des formes positives qui jouissent de la propriété (I) et ne sont pas des formes extrêmes. J'appelle "parfaite" chaque forme quadratique positive qui jouit de la propriété (I)".

On le constatera facilement sur le tableau ci-dessous. Le calcul du paramètre est basé sur l'extrémalité du déterminant, démontrée dans [B-M]. Les valeurs du paramètre et du déterminant seront données à 4 décimales, dans le cas irrationnel.

Départ	Arrivée	Contact→	Contact←	Paramètre	Kiss	Déterminant
P_2^1	P_2^1	3	3	1/2	2	$4(OK)$
P_3^1	P_3^1	6	6	1/2	5	$9/2(OK)$
P_4^1	P_4^1	48	48	2/3	9	$16/3(OK)$
P_4^1	P_4^2	16	10	1/2	9	$81/16(OK)$
P_5^1	P_5^1	80	80	1/2	16	$5(OK)$
P_5^1	P_5^1	240	240	1/2	14	$45/8(OK)$
P_5^1	P_5^2	40	15	0.3675	14	$5.2811(OK)$
P_5^1	P_5^3	40	15	3/4	14	$25/4(OK)$
P_6^1	P_6^1	135	135	1/2	28	$4(OK)$
P_6^1	P_6^1	1440	1440	1/2	24	$75/16(OK)$
P_6^1	P_6^1	6480	6480	1/2	22	$21/4(OK)$
P_6^1	P_6^2	45	45	1/3	27	$1024/243(OK)$
P_6^1	P_6^3	432	192	3/5	25	$24/5(OK)$
P_6^1	P_6^3	2592	1152	0.5701	20	$5.9144(OK)$
P_6^1	P_6^3	3240	1440	0.5455	20	$6.0227(OK)$
P_6^1	P_6^4	3240	9	0.4296	22	$5.1407(OK)$
P_6^1	P_6^4	4320	12	0.3582	22	$5.5456(OK)$
P_6^1	P_6^5	3240	21	0.4142	21	$5.4903(OK)$
P_6^1	P_6^6	12960	12	0.4245	21	$5.5898(OK)$
P_6^2	P_6^3	216	96	0.2245	20	$5.3563(OK)$
P_6^2	P_6^4	360	1	1/2	21	$81/16(OK)$
P_6^3	P_6^3	960	960	1/2	20	$99/16(OK)$
P_6^3	P_6^4	960	6	0.3360	20	$5.5968(OK)$
P_6^3	P_6^6	1440	3	0.3736	20	$5.7305(OK)$
P_6^3	P_6^7	96	21	4/5	20	$36/5(OK)$
P_6^4	P_6^6	18	6	2/3	20	$45/8(OK)$

References

[Ba] E.S.Barnes *The complete enumeration of extreme senary forms.* Phil. Trans. Roy. Soc. London **(A), 249**,(1957), 461-506

[B-M] A.-M. Bergé et J. Martinet *Sur la classification des réseaux eutactiques* J. London Math. Soc **53** (1996), 417-432.

[C-S] J.H. Conway and N.J.A. Sloane. *Sphere Packings, Lattices, and Groups.* Springer-Verlag, 1992.

[Ja] D.-O. Jaquet-Chiffelle. *Enumération complète des classes de formes parfaites en dimension* 7. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **43,1** (1993), 21-55.

[Ma] Jacques Martinet. *Les réseaux parfaits des espaces euclidiens.* Masson, 1996.

[Vo] G. Voronoï. *Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites.* J. reine angew. Math. **133** (1908), 97-178.