Algèbres de von Neumann finies ayant la propriété de Haagerup et semi-groupes L^2-compacts

Paul JOLISSAINT, Florian MARTIN *

10th June 2002

Abstract

The goal of this note is to characterize Haagerup property for finite von Neumann algebras in terms of $||.||_2$-continuous semi-group of completely positive L^2-compact maps. The generator of this semi-group could be interpreted as an analogue for von Neumann algebras having the Haagerup property of a proper conditionally negative definite map on a group having Haagerup property.

1 Introduction

Un groupe discret Γ possède la *propriété de Haagerup* s'il existe une suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{C}_0(\Gamma)$ normalisés (i.e. $\Phi_n(1) = 1$), de type positif, qui converge (ponctuellement) vers 1. De manière équivalente, un groupe Γ a la propriété de Haagerup s'il existe une fonction $\psi : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ conditionnellement de type négatif propre (i.e $\lim_{g\to\infty} \psi(g) = \infty$). Pour de plus amples informations sur la propriété de Haagerup pour les groupes localement compacts, on pourra se référer à [2].

Dans [3], M.Choda a observé qu'un groupe discret Γ a la propriété de Haagerup si et seulement si l'algèbre de von Neumann $L(\Gamma)$ du groupe admet une suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ d'applications complètement positives telles que

- $\tau \circ \Phi_n \leq \tau$ et Φ_n s'étend en un opérateur compact sur $l^2(\Gamma)$ (τ désigne la trace canonique sur $L(\Gamma)$).
- Pour tout $x \in L(\Gamma)$, $\|\Phi_n(x) - x\|_2$ tend vers zéro lorsque $n \to \infty$.

*Financé par la requête 20-56816.99 du FNRS suisse

Or, certaines algèbres de von Neumann qui ne sont pas nécessairement des algèbres de von Neumann de groupes partagent ce type de propriété : c'est le cas par exemple des facteurs de Popa obtenus par sommes amalgamées dans [8]. Voir [1]).
D'où la définition :

Définition 1 *Soit M une algèbre de von Neumann finie à prédual séparable. Soit τ une trace finie, normale, normalisée et fidèle sur M. M a la* propriété de Haagerup *par rapport à τ s' il existe une suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ d'applications complètement positives de M dans lui-même telles que :*
i) $\tau \circ \Phi_n \leq \tau$ et Φ_n est L^2-compacte, pour tout n ;
ii) pour tout $x \in M$, $\|\Phi_n(x) - x\|_{2,\tau} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

A priori cette définition dépend du choix de la trace τ, mais il n'en est rien. P. Jolissaint montre dans [4] que si τ et τ' sont deux traces finies, normales, normalisées et fidèles sur M, alors M a la propriété de Haagerup par rapport à τ si et seulement si M a la propriété de Haagerup par rapport τ'.
On observe que, si Γ a la propriété de Haagerup, alors il existe sur $L(\Gamma)$ un semi-groupe $(\theta_t)_{t>0}$ L^2-continu d'applications complètement positives sous-traciales ($\tau \circ \theta_t \leq \tau$) L^2-compact. En effet, si ψ est une fonction sur Γ valeurs réelles positives qui est conditionnellement de type négatif et propre, alors l'égalité $\theta_t(\lambda(g)) = \exp(-t\psi(g)) \cdot \lambda(g)$ définit un semi-groupe ayant les propriétés requises. De plus le générateur infinitésimal de ce semi-groupe est donné par l'opérateur de multiplication par ψ. On peut donc le comprendre comme un analogue sur l'algèbre de von Neumann de Γ de la fonction conditionnellement de type négatif et propre, ψ.
Le but de cette note est de montrer que, si une algèbre de von Neumann finie M a la propriété de Haagerup, alors il existe un semi-groupe d'applications complètement positives qui réduisent ou préservent la trace, $\|.\|_2$-continu et L^2-compact.

Notre construction du semi-groupe $(\theta_t)_{t\geq 0}$ est adaptée de [5], où l'auteur construit un semi-groupe fortement continu sur une C^*-algèbre séparable ; nous présentons ici une preuve détaillée de la construction pour le confort du lecteur.

2 Préliminaires

Introduisons quelques notations. M désigne une algèbre de von Neumann à prédual séparable ; lorsque M est finie, nous noterons τ une trace finie normale normalisée et fidèle sur M. $L^2(M, \tau)$ est l'espace de Hilbert standard

associé à τ par construction GNS et nous désignerons par ξ_0 le vecteur cyclique de $L^2(M,\tau)$ qui implémente la trace τ. Pour $x \in M$, la norme $\|x\|_2$ est égale à $\|x\xi_0\|_{L^2}$. Toute application $\Phi : M \to M$ complètement positive normale réduisant la trace (i.e. $\tau \circ \Phi \leq \tau$) s'étend alors naturellement en un opérateur contractant T_Φ sur $L^2(M,\tau)$ en posant $T_\Phi(x\xi_0) = \Phi(x)\xi_0$, $\forall x \in M$. Enfin, M_1 désigne la boule unité de M pour la norme d'opérateur.
Avant d'énoncer le théorème principal, nous aurons besoin des résultats préliminaires suivants :

Proposition 1 *[4] Soit M une algèbre de von Neumann finie ayant la propriété de Haagerup par rapport à τ. Alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ d'applications complètement positives sur M satisfaisant :*
(i') $\tau \circ \phi_n = \tau$, $\phi(1) = 1$ et ϕ_n est L^2-compacte pour tout $n \geq 1$.
(ii') pour tout $x \in M$, $\|\phi_n(x) - x\|_{2,\tau} \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Proposition 2 *Soit M une algèbre de von Neumann finie, munie d'une trace normale, finie, fidèle normalisée τ, et soit $\Phi : M \to M$ une application complètement positive, normale, telle que $\tau \circ \Phi \leq \tau$. Alors il existe une unique application linéaire $\Phi^* : M \to M$ telle que :*

(i) $\tau(\Phi^*(x)y) = \tau(x\Phi(y))$, pour tout $x, y \in M$;

(ii) Φ^* est complètement positive ;

(iii) $\tau \circ \Phi^* \leq \|\Phi(1)\|\tau$ et en particulier Φ^* est normale ;

(iv) le prolongement T_{Φ^*} de Φ^* à $L^2(M,\tau)$ satisfait $T_{\Phi^*} = (T_\Phi)^*$.

Preuve :
L'unicité de Φ^* suit immédiatement de (i). Démontrons alors l'existence d'une telle application :
Fixons $x \in M$ et définissons la forme sesquilinéaire $\sigma_x : M\xi_0 \to M\xi_0$ par : $\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0) = \tau(x\Phi(yz^*))$. On a alors l'inégalité, pour tout $y, z \in M$:

$$|\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| \leq 2\|x\|\|y\|_2\|z\|_2. \text{ (*)}$$

En effet, supposons d'abord que $x = x^*$ et que $y = z$. Ecrivons $x = x_+ - x_-$ avec $x_-, x_+ \in M_+$, $x_+x_- = 0$, $\|x_\pm\| \leq \|x\|$; on obtient :

$$\begin{aligned} |\sigma_x(y\xi_0, y\xi_0)| &= |\tau(x_+\Phi(yy^*)) - \tau(x_-\Phi(yy^*)| \\ &\leq \max\{\tau(x_+\Phi(yy^*)), \tau(x_-\Phi(yy^*))\} \\ \leq \|x\|\tau(\Phi(yy^*)) & \\ &\leq \|x\|\|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Ensuite si $x = x^*$ et si y, z sont arbitraires, on vérifie sans peine que

$$\overline{\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)} = \sigma_x(z\xi_0, y\xi_0)$$

et donc

$$\begin{aligned} 2\mathrm{Re}(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0) &= \sigma_x(y\xi_0, z\xi_0) + \sigma_x(z\xi_0, y\xi_0) \\ &= \frac{1}{2}[\sigma_x(y\xi_0 + z\xi_0, y\xi_0 + z\xi_0) - \sigma_x(y\xi_0 - z\xi_0, y\xi_0 - z\xi_0)] \end{aligned}$$

par polarisation. Il vient :

$$\begin{aligned} |2\mathrm{Re}(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| &\leq \frac{1}{2}\|x\|(\|y+z\|_2^2 + \|y-z\|_2^2) \\ &= \|x\|(\|y\|_2^2 + \|z\|_2^2) \end{aligned}$$

Ainsi, $|\mathrm{Re}(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| \leq \|x\|$ si $\|y\|_2, \|z\|_2 \leq 1$, donc $|Re(\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| \leq \|x\|\|y\|_2\|z\|_2$.
Or, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta}\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0) = |\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)|$, et donc :

$$|\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| = \sigma_x(e^{i\theta}y\xi_0, z\xi_0) = \mathrm{Re}\sigma_x(e^{i\theta}y\xi_0, z\xi_0) \leq \|x\|\|y\|_2\|z\|_2$$

Enfin, si $x \in M$ est quelconque, $x = x_1 + ix_2$ avec $x_i^* = x_i$, $\|x_i\| \leq \|x\|$, $(i = 1, 2)$. Ainsi $|\sigma_x(y\xi_0, z\xi_0)| \leq |\sigma_{x_1}(y\xi_0, z\xi_0)| + |\sigma_{x_2}(y\xi_0, z\xi_0)| \leq 2\|x\|\|y\|_2\|z\|_2$; ce qui démontre (*).

Puisque σ_x est une forme sesquilinéaire bornée sur $M\xi_0 \times M\xi_0$, elle se prolonge continûment à $L^2(M, \tau) \times L^2(M, \tau)$ et elle définit un opérateur borné $\Phi^*(x)$ sur $L^2(M, \tau)$ caractérisé par

$$< \Phi^*(x)y\xi_0 | z\xi_0 >= \tau(x\Phi(yz*)), \forall y, z \in M \ (**)$$

Vérifions que $\Phi^*(x)$ appartient à M : pour cela, il suffit de montrer que :

$$< \Phi^*(x)Jw^*Jy\xi_0 | z\xi_0 >=< Jw^*J\Phi^*(x)y\xi_0 | z\xi_0 >$$

pour tout $y, z, w \in M$ (où J est défini par $J(x\xi_0) = x^*\xi_0$). Or,

$$\begin{aligned}
< \Phi^*(x)Jw^*Jy\xi_0|z\xi_0 > &= < \Phi^*(x)yw\xi_0|z\xi_0 > \\
&= \tau(x\Phi(ywz*)) \\
&= \tau(x\Phi(y(zw^*)^*)) \\
&= < \Phi^*(x)y\xi_0|JwJz\xi_0 > \\
&= < Jw^*J\Phi^*(x)y\xi_0|z\xi_0 >
\end{aligned}$$

Cela démontre la propriété (i). Démontrons alors que Φ^* possède les autres propriétés :

(ii) Pour montrer que Φ^* est complètement positive, considérons $x_1, ..., x_n$, $y_1, ..., y_n$ et z dans M :

$$\begin{aligned}
< \sum_{i,j=1}^{n} y_j^*\Phi^*(x_j^*x_i)y_iz\xi_0|z\xi_0 > &= \sum_{i,j=1}^{n} < \Phi^*(x_j^*x_i)y_iz\xi_0|y_jz\xi_0 > \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \tau(x_j^*x_i\Phi(y_iz(y_jz)^*)) \\
&= \tau(\sum_{i,j=1}^{n} x_i\Phi(y_iz(y_jz)^*)x_j) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

puisque Φ est complètement positive.

(iii) On a pour tout $x \in M$:

$$\tau \circ \Phi^*(x^*x) = \tau(x^*x\Phi(1)) \leq \|\Phi(1)\|\tau(x^*x)$$

(iv) Rappelons que $T_{\Phi^*}(x\xi_0) = \Phi^*(x)\xi_0$, pour tout $x \in M$. Ainsi, si $x, y \in M$:

$$< T_{\Phi^*}(x\xi_0)|y\xi_0 >= \tau(y^*\Phi^*(x)) = \tau(\Phi(y)^*x) =< x\xi_0|T_\Phi(y\xi_0) >$$

Ce qui complète la preuve de la proposition. □

Corollaire 1 *Soit M, τ, Φ et Φ^* comme dans la proposition et supposons de plus que $\|\Phi(1)\| \leq 1$. Alors on a, pour tout $x \in M$:*

$$\|\Phi^*(x) - x\|_2^2 \leq 2\|x\|_2\|\Phi(x) - x\|_2.$$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\|\Phi^*(x) - x\|_2 &= \|\Phi^*(x)\|_2^2 + \|x\|_2^2 - \tau(\Phi^*(x^*)x) - \tau(x^*\Phi^*(x)) \\
&\leq 2\|x\|_2^2 - \tau(x^*\Phi(x)) - \tau(\Phi(x^*)x) \\
&= 2\mathrm{Re}\tau(x^*(x - \Phi(x))) \\
&\leq 2\|x\|_2\|x - \Phi(x)\|_2.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2 *Soit M une algèbre de von Neumann finie à prédual séparable ayant la propriété de Haagerup et soit τ une trace sur M comme ci-dessus. Alors il existe une suite d'applications complètement positives unitales normales $\Phi_n : M \to M$ telle que*

(i) $\tau \circ \Phi_n = \tau$ *et* $\Phi_n^* = \Phi_n$, $\forall n \geq 1$ *;*

(ii) T_{Φ_n} *est compact, pour tout* $n \geq 1$ *;*

(iii) *pour tout* $x \in M$, *on a* $\|\Phi_n(x) - x\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Preuve :
Observons que si Φ est complètement positive unitale et si $\tau \circ \Phi = \tau$ alors Φ^* est unitale et $\tau \circ \Phi^* = \tau$.
Ainsi, si $(\psi_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'applications complètement positives unitale préservant la trace avec T_{ψ_n} compact et $\|\psi_n(x) - x\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ pour tout x, on pose $\Phi_n = \frac{1}{2}(\psi_n + \psi_n^*)$.
La suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie satisfait aux conditions $(i) - (iii)$. □

L'observation suivante est le lemme 2.1 de [5] :

Lemme 1 *Il existe une constante universelle K telle que si E est un espace de Banach et $T \in B(E)$ satisfait $\|T\| \leq 1$, alors on a :*

$$\|(T - Id)\exp(t(T - Id))\| \leq K \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Finalement nous aurons besoin du lemme suivant, inspiré du lemme 2.3 de [5] :

Lemme 2 *Soit $(\chi_n)_{n\geq 1}$ une suite d'applications c.p.u (complètement positives unitales) préservant la trace, L^2-compactes, telles que $\chi_n \circ \chi_m = \chi_m \circ \chi_n$, $\forall n, m$. Supposons que le sous-ensemble*

$$F = \{x \in M_1 | \sum_{n\geq 1} \|\chi_n(x) - x\|_2 < \infty\}$$

soit dense dans M_1.
Alors il existe un semi-groupe $(\theta_t)_{t\geq 0}$ d'applications c.p.u préservant la trace tel que, pour tout $t>0$, $\{\exp(t(\chi_1+\ldots+\chi_n-nId))\}_{n\geq 1}$ converge en $\|.\|_2$ vers θ_t. De plus, pour tout $t>0$, $\sup_{\|x\|_2\leq 1}\|(Id-\frac{1}{n}(\chi_1+\ldots+\chi_n)\theta_t(x)\|_2 \overset{n\to\infty}{\to} 0$.
En particulier, θ_t est L^2-compact, pour tout $t>0$.
Si de plus $\chi_n^*=\chi_n$, pour tout $n\geq 1$, alors les éléments du semi-groupe satisfont $\theta_t^*=\theta_t$, pour tout $t>0$.

Preuve :
Posons $\theta_t^n=\exp(t((\chi_1+\ldots+\chi_n)-nId))$, pour tout $t>0$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $m,n\in\mathbb{N}^*$, $m>n$ posons $\delta_{n,m}=(m-n)Id-(\chi_{n+1}+\ldots+\chi_m)$.
Comme les χ_i commutent, $\theta_t^m=\theta_t^n\exp(-t\delta_{n,m})$.
Pour $x\in F$, on a :

$$\begin{aligned}\|(\theta_t^m-\theta_t^n)x\|_2 &= \|\theta_t^n(\exp(-t\delta_{n,m})x-x)\|_2\\ &\leq t\|\delta_{n,m}(x)\|_2\end{aligned}$$

En effet, les θ_t^n et $\exp(-t\delta_{n,m})$ sont c.p.u et préservent la trace et on a :

$$\begin{aligned}\|\exp(-t\delta_{n,m})x-x\|_2 &= \|\int_0^1\frac{d}{ds}(\exp(-ts\delta_{n,m})x)ds\|_2\\ &= \|\int_0^1 -t\delta_{n,m}\ \exp(-ts\delta_{n,m})\ ds\|_2\\ &\leq t\|\delta_{n,m}(x)\|_2(||\exp(-t\delta_{n,m})||+1)\\ &\leq 2t\|\delta_{n,m}(x)\|_2\end{aligned}$$

car $\exp(-t\delta_{n,m})$ est une contraction.
Or,

$$\begin{aligned}\|\delta_{n,m}(x)\|_2 &= \|(m-n)Id-(\chi_{n+1}+\ldots+\chi_m)(x)\|_2\\ &= \|[(Id-\chi_{n+1})+(Id-\chi_{n+2})+\ldots+(Id-\chi_m)](x)\|_2\\ &\leq \sum_{i=n+1}^{m}\|\chi_i(x)-x\|_2 \underset{n,m\to\infty}{\to} 0\end{aligned}$$

car $x\in F$.

Donc, pour tout $x\in F$, la suite $n\mapsto\theta_t^n(x)$ est une suite de Cauchy en $\|.\|_2$ de M_1 (car $F\subset M_1$). Ainsi, il existe un élément de M_1, $\theta_t(x)$, tel que

$$\|.\|_2\text{-}\lim_{n\to\infty}\theta_t^n(x)=\theta_t(x),\ \forall x\in F$$

Par densité de F, on construit ainsi des applications c.p.u et préservant la trace, $(\theta_t)_{t\geq 0}$.

On obtient :

$$\begin{aligned}\|\theta_t(x)-x\|_2 &= \|.\|_2\text{-}\lim_{n\to\infty}\|\theta_t^n(x)-x\|_2\\ &\leq t\,\|.\|_2\text{-}\lim_{n\to\infty}\|[(\chi_1+\ldots+\chi_n)-nId](x)\|_2\\ &\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

car $\|[(\chi_1+\ldots+\chi_n)-nId](x)\|_2$ est bornée (en effet, pour tout $x\in F$,

$$\begin{aligned}\|[(\chi_1+\ldots+\chi_n)-nId](x)\|_2 &= \|\sum_{k=1}^{n}(\chi_k-Id)(x)\|_2\\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\|\chi_k(x)-x\|_2\\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\|\chi_k(x)-x\|_2<\infty).\end{aligned}$$

La propriété de semi-groupe est de plus vérifiée :

$$\theta_{s+t}(x)=\|.\|_2\text{-}\lim_{n\to\infty}\theta_{s+t}^n(x)=\|.\|_2\text{-}\lim_{n\to\infty}\theta_s^n\theta_t^n(x)=\theta_s\theta_t(x)$$

Pour $n>0$ fixé, considérons la suite $(\exp(-t\delta_{n,m}))_{m>n}$. Cette suite converge ponctuellement, pour n et t fixés, vers une application c.p.u, que l'on notera $T_{n,t}$:
Pour $x\in M$, $t>0$ fixés, on a :

$$\|\exp(-t\delta_{n,m})(x)-T_{n,t}(x)\|_2\underset{n\to\infty}{\to}0$$

Montrons que pour tout $t>0$, $n>0$, on a $\theta_t=\theta_t^nT_{n,t}$.
Soit $x\in M$ et $\varepsilon>0$; alors il existe un entier m (dépendant de n,t,x,ε) tel que :
- $\|\theta_t(x)-\theta_t^m(x)\|_2\leq\frac{\varepsilon}{2}$;
- $\|\exp(-t\delta_{n,m})(x)-T_{n,t}(x)\|_2\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Donc, comme $\theta_t^m=\theta_t^n\exp(-t\delta_{n,m})$, on obtient :

$$\begin{aligned}\|\theta_t(x)-\theta_t^nT_{n,t}(x)\|_2 &\leq \|\theta_t(x)-\theta_t^m(x)\|_2+\\ &+ \|\theta_t^n(\exp(-t\delta_{n,m})(x)-T_{n,t}(x))\|_2\\ &\leq \|\theta_t(x)-\theta_t^m(x)\|_2+\|\exp(-t\delta_{n,m})(x)-T_{n,t}(x)\|_2\\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Voyons alors qu'il existe une constante K telle que

$$\|[Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots \chi_n)]\theta_t\|_{B(L^2(M))} \leq \frac{K}{\sqrt{nt}}.$$

Comme $T_{n,t}$ est une contraction, on a, dans un premier temps :
$\|[Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots \chi_n)]\theta_t\|_{B(L^2(M))} \leq \|[Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots \chi_n)]\theta_t^n\|_{B(L^2(M))}$.
Posons $S_n \doteq \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots \chi_n)$. On a : $\theta_t^n = \exp(nt(S_n - Id))$ et donc :

$$\begin{aligned}\|[Id - \frac{1}{n}(\chi_1 + \dots \chi_n)]\theta_t^n\|_{B(L^2(M))} &= \|(Id - S_n)\exp(nt(S_n - Id))\|_{B(L^2(M))} \\ &\leq \frac{K}{\sqrt{nt}},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant valable grâce au lemme 1.
Comme S_n est L^2-compacte, et que l'on vient de voir que
$\|\theta_t - S_n\theta_t\|_{B(L^2(M))} \overset{n\to\infty}{\to} 0$, on conclut que θ_t est L^2-compact, pour tout $t > 0$.
Finalement, il est clair que si $\chi_n^* = \chi_n$, alors on a $\theta_t^* = \theta_t$, pour tout $t > 0$.
□

3 Le théorème principal

Le résultat principal est le suivant :

Théorème 1 *Soit (M, τ) une algèbre de von Neumann finie à prédual séparable. On a l'équivalence entre :*
(i) M a la propriété de Haagerup.
(ii) Il existe un semi-groupe $\|.\|_2$-continu, $(\theta_t)_{t\geq 0}$, d'applications complètement positives unitales préservant la trace L^2-compactes avec $\theta_t^* = \theta_t$ pour tout $t > 0$.

La preuve s'inspire de celles des lemmes 2.4 et 4.2 de [5].
Preuve :
Par le corollaire 2, il existe une suite $(\psi_n)_{n\geq 1}$ d' applications complètement positives unitales (c.p.u) préservant la trace, L^2-compactes, telles que, $\forall x \in M$, $\|\psi_n(x) - x\|_2 \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et satisfaisant $\psi_n = \psi_n^*$. Soit encore $(a_l)_{l\geq 1} \subset M_1$ une suite $\|.\|_2$-dense de la boule unité fermée de M. Quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que $\|\psi_n(x) - x\|_2 \leq 2^{-n}\|x\|_2$ sur le sous-espace engendré par $\{\psi_j^k(a_l) \mid 0 \leq j, l < n,\ k \leq n^2\}$.
Posons $\Delta_n = n\,Id - (\psi_1 + \dots + \psi_n)$ et $\Phi_{t,n} = \exp(-t\Delta_n)$, $\forall t > 0$. Les $\Phi_{t,n}$

sont c.p.u et préservent la trace et comme $\Delta_n^* = \Delta_n$, on a $\Phi_{t,n}^* = \Phi_{t,n}$, pour tout t, n. Pour tout $\alpha > 0$:

$$\alpha[\alpha Id + \Delta_n]^{-1} = \alpha \int_0^\infty \exp(-t\alpha)\Phi_{t,n} dt.$$

Ainsi, $[Id + \alpha\Delta_n]^{-1} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \exp(\frac{-t}{\alpha})\Phi_{t,n} dt$ et on conclut alors que $[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}$ est c.p.u et préserve la trace (car τ et $\int_0^\infty$ commutent). De plus, $([\alpha Id + \Delta_n]^{-1})^* = [\alpha Id + \Delta_n]^{-1}$

Montrons alors que pour tout l, la suite $n \mapsto [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)$ est une suite de Cauchy dans $(M_1, \|.\|_2)$.

Posons $\theta_n = \frac{1}{n}(\psi_1 + \ldots + \psi_n)$, (donc $\Delta_n = n(Id - \theta_n)$). Alors pour $n, p > 0$ et $l \leq n$, on a :

$$(Id - \psi_{n+p})[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l) = (Id - \psi_{n+p})\frac{1}{n\alpha + 1}\sum_{k\geq 0}(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1})^k \theta_n^k(a_l).$$

En effet,

$$\frac{1}{n\alpha + 1}\sum_{k\geq 0}\frac{n\alpha}{n\alpha + 1}^k \theta_n^k = \frac{1}{n\alpha + 1}(Id - \frac{n\alpha}{n\alpha + 1}\theta_n)^{-1} = [Id + \alpha\Delta_n]^{-1}$$

Posons

$$\begin{aligned} A &= (Id - \psi_{n+p})\frac{1}{n\alpha + 1}\sum_{k=0}^{(n+p)^2}(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1})^k \theta_n^k(a_l) \\ &= \frac{1}{n\alpha + 1}\sum_{k=0}^{(n+p)^2}(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1})^k (Id - \psi_{n+p})\theta_n^k(a_l) \end{aligned}$$

et

$$B = (Id - \psi_{n+p})\frac{1}{n\alpha + 1}\sum_{k>(n+p)^2}(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1})^k \theta_n^k(a_l).$$

Par hypothèse :

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &\leq \frac{1}{n\alpha + 1}\sum_{k=0}^{(n+p)^2}(\frac{n\alpha}{n\alpha + 1})^k \|\theta_n^k(a_l)\|_2 2^{-(n+p)} \\ &\leq \frac{1}{n\alpha + 1}\frac{1 - (\frac{n\alpha}{n\alpha+1})^{(n+p)^2+1}}{1 - \frac{n\alpha}{1+n\alpha}}\|a_l\|_2 2^{-(n+p)} \\ &\leq 2^{-(n+p)}\|a_l\|_2. \end{aligned}$$

En effet : $||\frac{1}{n}(\psi_1 + \ldots + \psi_n)(x)||_2 \leq \|x\|_2$, ce qui implique $\|\theta_n^k\|_2(a_l) \leq \|a_l\|_2$.
De plus :

$$\begin{aligned}
\|B\|_2 &\leq \frac{2}{n\alpha+1} \sum_{k>(n+p)^2} (\frac{n\alpha}{n\alpha+1})^k \|\theta_n^k(a_l)\|_2 \\
&\leq 2(\frac{n\alpha}{n\alpha+1})^{(n+p)^2} \|a_l\|_2.
\end{aligned}$$

Soit alors $\alpha_0 > 0$ et $\alpha \in]0, \alpha_0]$; pour n suffisamment grand,

$$(1 - \frac{1}{n\alpha+1})^n = (\frac{n\alpha}{n\alpha+1})^n \leq \exp(-\frac{1}{2\alpha_0})$$

et

$$(\frac{n\alpha}{n\alpha+1})^{(n+p)^2} \leq (\frac{n\alpha}{n\alpha+1})^{n(n+p)} \leq \exp(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}).$$

(En effet :

$$\begin{aligned}
(\frac{n\alpha}{n\alpha+1})^n &= ((\frac{n\alpha+1}{n\alpha})^n)^{-1} \\
&= ((1+\frac{1}{n\alpha})^n)^{-1} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-\frac{1}{\alpha}) \text{ en décroissant.)}
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\|(Id - \psi_{n+p})[Id + \alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)\|_2 &\leq (2^{-(n+p)} + 2\exp(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}))\|a_l\|_2 \\
&\leq 2(2^{-(n+p)} + \exp(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}))\|a_l\|_2
\end{aligned}$$

Donc, pour l fixé, n suffisamment grand et $m > n$, on a :

$$\|[Id+\alpha\Delta_m][Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(a_l) - a_l\|_2 = \alpha\|\sum_{p=1}^{m-n}(Id-\psi_{n+p})[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)\|_2$$

puisque :

$$\begin{aligned}
\alpha\sum_{p=1}^{m-n}(Id - \psi_{n+p}) &= [(Id + m\alpha Id - \alpha(\psi_1 + \ldots + \psi_m)] \\
&\quad -Id - n\alpha Id + \alpha\psi_1 + \ldots + \psi_n \\
&= [Id + \alpha\Delta_m] - [Id + \alpha\Delta_n].
\end{aligned}$$

Donc :

$$\|[Id+\alpha\Delta_m][Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)-a_l\|_2 \leq$$
$$2\alpha\sum_{p=1}^{m-n}(2^{-(n+p)}+\exp(-\frac{(n+p)}{2\alpha_0}))\|a_l\|_2$$
$$\leq 2\alpha\|a_l\|_2(2^{-n}+\exp(-\frac{n}{2\alpha_0})).$$

Or comme $[Id+\alpha\Delta_m]^{-1}$ est c.p.u, on peut conclure que

$$\|[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)-[Id+\alpha\Delta_m]^{-1}(a_l)\|_2 \leq C(2^{-n}+\exp(-\frac{n}{2\alpha_0}))$$

où C est une constante ne dépendant que de a_l et α.
Ainsi la suite $n \mapsto [Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(a_l)$ est une suite de Cauchy de M_1 pour la $\|.\|_2$ et par densité de la suite des a_l on obtient la même conclusion pour la suite $n \mapsto [Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(x)$, où $x \in M_1$. On pose alors :

$$\rho_\alpha(x) = \|.\|_2\text{-}\lim_{n\to\infty}[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(x),\ \forall x \in M_1$$

Comme M est une algèbre de von Neumann finie, $(M_1, \|.\|_2)$ est complète et on peut conclure que $\rho_\alpha(x) \in M_1,\ \forall x \in M_1$.
Bien entendu, les applications ρ_α sont c.p.u, préservent la trace et $\rho_\alpha^* = \rho_\alpha$.
Pour $x = a_l$, la convergence est uniforme sur $]0, \alpha_0]$, donc $\|.\|_2\text{-}\lim_{\alpha\to 0}\rho_\alpha(a_l) = a_l$, ce qui implique que $\|.\|_2\text{-}\lim_{\alpha\to 0}\rho_\alpha(x) = x,\ \forall x$.
De plus, l'équation de la pseudo-résolvante fournit :

$$\alpha[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(x)-\beta[Id+\beta\Delta_n]^{-1}(x) = (\beta-\alpha)[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(x)[Id+\beta\Delta_n]^{-1}(x)$$

d'où :

$$\alpha\rho_\alpha - \beta\rho_\beta = (\beta-\alpha)\rho_\alpha\rho_\beta,\ \forall \alpha, \beta > 0$$

Montrons alors que les applications ρ_α sont L^2-compactes, pour tout $\alpha > 0$.

Pour $n < m$, posons à nouveau $\theta_n = \frac{1}{n}(\psi_1 + \ldots + \psi_n)$, $\Delta_n = nId - (\psi_1 + \ldots + \psi_n)$, $\delta_{n,m} = \Delta_m - \Delta_n$ et $y_{m,n} = [Id+\alpha\Delta_n]^{-1}[Id + \frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x)$.
Alors :

$$\begin{aligned}
x &= [Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}][Id+\alpha\Delta_n](y_{m,n}) \\
&= [(1+n\alpha)Id+\alpha\delta_{n,m}-\alpha(\psi_1+\ldots+\psi_n)-\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}) \\
&= [[Id+\alpha\Delta_n]+\alpha(\Delta_m-\Delta_n)-\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}) \\
&= [[Id+\alpha\Delta_m]-\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}).
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
[Id+\alpha\Delta_m]^{-1}(x) &= y_{m,n} - [Id+\alpha\Delta_m]^{-1}[\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n](y_{m,n}) \\
&= [Id+\alpha\Delta_n]^{-1}[Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x) \\
&- [Id+\alpha\Delta_m]^{-1}[\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n][Id+\alpha\Delta_n]^{-1} \\
&\quad \cdot[Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x).
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
&[Id+\alpha\Delta_m]^{-1} - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1}[Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -[Id+\alpha\Delta_m]^{-1}[\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}\delta_{n,m}\theta_n][Id+\alpha\Delta_n]^{-1}[Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}[Id+\alpha\Delta_m]^{-1}(\Delta_m-\Delta_n)\theta_n[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}[Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -\frac{\alpha^2 n}{n\alpha+1}[Id+\alpha\Delta_m]^{-1}(\Delta_m-\Delta_n)[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\theta_n[Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1} \\
&= -\frac{n\alpha}{n\alpha+1}([Id+\alpha\Delta_n]^{-1} - [Id+\alpha\Delta_m]^{-1})\theta_n[Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}
\end{aligned}$$

On considère alors la suite $\{\psi_n, \psi_{n+1}, \ldots\}$ et on montre comme précédemment que la suite $m \mapsto [Id+\frac{\alpha}{n\alpha+1}\delta_{n,m}]^{-1}(x)$ est de Cauchy dans $(M_1, \|.\|_2)$ et converge en $\|.\|_2$ vers disons $\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}(x)$, $\forall x \in M$.

Par le calcul précédent et en passant à la $\|.\|_2$-limite pour $m \to \infty$, on a pour $x \in M$ fixé :

$$\rho_\alpha - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}} = \frac{n\alpha}{n\alpha+1}(\rho_\alpha - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}$$

Par hypothèse, les ψ_n sont L^2-compactes et donc θ_n aussi. Ainsi, $-\frac{n\alpha}{n\alpha+1}(\rho_\alpha - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}$ est L^2-compacte.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\|(Id-\theta_n)[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(x)\|_2 &= \frac{1}{n\alpha}\|\alpha\Delta_n[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(x)\|_2 \\
&\leq \frac{1}{n\alpha}(\|[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}(x)\|_2 + \|x\|_2) \\
&\leq \frac{2}{n\alpha}\|x\|_2.
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|(Id-\theta_n)[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}(x)\|_2 \leq \frac{2}{n\alpha}\|x\|_2.$$

Or,

$$\begin{aligned}
&[\rho_\alpha - \theta_n[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}} - \frac{n\alpha}{n\alpha+1}(\rho_\alpha - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}](x)\\
&\quad = [\rho_\alpha - \theta_n[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}} - (\rho_\alpha - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}})](x)\\
&\quad = (Id-\theta_n)[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}(x).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
&\|[\rho_\alpha - \theta_n[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}} - \frac{n\alpha}{n\alpha+1}(\rho_\alpha - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}](x)\|_2\\
&\qquad \leq \frac{2}{n\alpha}\|x\|_2.
\end{aligned}$$

On observe alors que

$$\psi_{n,\alpha} \doteq \theta_n[Id+\alpha\Delta_n]^{-1}\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}} + \frac{n\alpha}{n\alpha+1}(\rho_\alpha - [Id+\alpha\Delta_n]^{-1})\theta_n\rho^{(n)}_{\frac{n\alpha}{n\alpha+1}}]$$

est L^2-compacte car θ_n l'est. (Bien entendu, $\psi_{n,\alpha}$ préserve la trace).
La dernière égalité nous livre :

$$\|\rho_\alpha - \psi_{n,\alpha}\|_{\mathbb{B}(L^2(M))} \leq \frac{2}{n\alpha}.$$

On conclut que, pour tout $\alpha > 0$, ρ_α est L^2-compacte.
Via l'équation de pseudo-résolvante que satisfont les applications ρ_α, on conclut qu'elles commutent. Ainsi les $\rho_{\frac{1}{n}} \doteq \chi_n$ forment une suite d'applications c.p.u préservant la trace, L^2-compactes telles que :
(i) $\chi_n \circ \chi_m = \chi_m \circ \chi_n$, $\forall n, m$;
(ii) $\|\chi_n(x) - x\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
(iii) $\chi_n^* = \chi_n$ pour tout $n \geq 1$.
Elles permettent de construire le semi-groupe cherché grâce au lemme 2. □

Récemment, S. Popa a identifié dans [6] une classe remarquable de facteurs de type II_1 en utilisant (entre autres) une version relative de la propriété de Haagerup. Avant d'en donner une définition, il est nécessaire de fixer quelques notations.
On considère une algèbre de von Neumann finie M à prédual séparable munie d'une trace normale, finie, fidèle, normalisée τ et une sous-algèbre de von

Neumann B de M contenant 1. On note E_B l'unique espérance conditionnelle de M sur B qui préserve τ, et e_B le prolongement de E_B à $L^2(M,\tau)$, qui est la projection orthogonale de $L^2(M,\tau)$ sur le sous-espace $L^2(B,\tau)$. On désigne par $\langle M,B\rangle$ l'algèbre de von Neumann engendrée par $M\cup\{e_B\}$; on a $e_Bxe_B = E_B(x)e_B$ pour tout $x\in M$, et l'ensemble des sommes finies d'éléments de la forme xe_By est une sous-*-algèbre faiblement dense dans $\langle M,B\rangle$, voir [6]. Enfin, on désigne par $\mathcal{J}(\langle M,B\rangle)$ l'idéal normiquement fermé de $\langle M,B\rangle$ engendré par les projections finies de $\langle M,B\rangle$ ([6], [7]). Observons que lorsque $B=\mathbb{C}$, cet idéal est l'ensemble des opérateurs compacts sur $L^2(M,\tau)$.

Suivant [6], étant donné une paire $1\in B\subset M$ comme ci-dessus, on dit que M possède la *propriété de Haagerup relativement à B* s'il existe une trace τ comme ci-dessus et une suite $(\Phi_n)_{n\geq 1}$ d'applications complètement positives de M dans M telles que :

(1) $\tau\circ\Phi_n\leq\tau$ pour tout $n\geq 1$;

(2) Φ_n est B-bilinéaire pour tout n : $\Phi_n(b_1xb_2) = b_1\Phi_n(x)b_2$ pour tous $x\in M$ et $b_1,b_2\in B$;

(3) pour tout n, le prolongement T_{Φ_n} de Φ_n à $L^2(M,\tau)$ appartient à l'idéal $\mathcal{J}(\langle M,B\rangle)$;

(4) pour tout $x\in M$, $\lim\limits_{n\to\infty}\|\Phi_n(x)-x\|_2 = 0$.

Il est facile de vérifier que le théorème 1 s'étend à cette situation : si la paire $B\subset M$ possède la propriété ci-dessus, alors il existe un semi-groupe $(\theta_t)_{t\geq 0}$ d'applications complètement positives préservant τ telles que

(a) $\theta_t(b_1xb_2) = b_1\theta_t(x)b_2$ pour tout $t\geq 0$, pour tous $b_1,b_2\in B$ et tout $x\in M$;

(b) pour tout $t>0$, le prolongement de θ_t à $L^2(M,\tau)$ appartient à $\mathcal{J}(\langle M,B\rangle)$;

(c) pour tout $x\in M$, on a $\lim\limits_{t\to 0}\|\theta_t(x)-x\|_2 = 0$.

Références

[1] F. Boca, *On the method of constructing irreducible finite index subfactors of Popa,* Pacific J. Math., 161 :201-231, 1993. No. 2.

[2] P.-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, A. Valette, *Groups with the Haagerup property (Gromov's a-T-menability),* 2001, Birkhauser.

[3] M. Choda, *Group factors of the Haagerup type,* Proc.Japan Acad., 59 :174-209, 1983.

[4] P. Jolissaint, *Haagerup Approximation property for finite von Neumann Algebras,* To appear in Journal of Operator Theory.

[5] J.-L. Sauvageot, *Strong Feller semi-groups on C^*-algebras,* J. Operator Theory, 42 (1999), 83-102.

[6] S. Popa, *On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants,* Preprint (2002).

[7] S. Popa, F. Radulescu, *Derivations of von Neumann algebras into the compact ideal space of a semifinite algebra,* Duke Math. Journal, Vol. 57, No. 2 (1988), 485-518.

[8] S. Popa, *Markov traces on universal Jones algebras and subfactors of finite index,* Invent. Math., 111 (1993), 375-405.

P. Jolissaint & F. Martin
Institut de Mathématiques
Université de Neuchâtel
Emile-Argand 11
CH-2000 Neuchâtel, Switzerland
e-mail :
paul.jolissaint@unine.ch
florian.martin@unine.ch