GÉOMÉTRIE SPINORIELLE EXTRINSÈQUE ET RIGIDITÉS

SIMON RAULOT

RÉSUMÉ. Dans cet article, on donne des résultats de rigidité pour des variétés riemanniennes spinorielles compactes à bord dont la courbure scalaire est positive ou minorée par une constante négative. Certains de ces énoncés sont connus mais sont démontrés à l'aide de puissants résultats : des théorèmes de la masse positive. On présente ici une approche directe qui permet d'éviter cette étape.

Extrinsic Spin Geometry and Rigidity

ABSTRACT. In this article, we prove some rigidity results for compact Riemannian spin manifolds with boundary with scalar curvature bounded from below by a non-positive constant. Some of these statements are allready known but their proof rely on strong resluts: some positive mass theorems. We present here a direct approach which avoid this step.

1. INTRODUCTION

L'utilisation des spineurs en géométrie riemannienne a été l'objet de plusieurs travaux. Un exemple important en est la preuve de Witten du théorème de la masse positive pour les variétés spin asymptotiquement plates [Wit81]. À l'aide de ce théorème, on peut énoncer des résultats de rigidités pour certaines variétés riemanniennes. Par exemple, on montre que sur $\mathbb{R}^3$, il n'existe pas de métrique à courbure scalaire positive et plate en dehors d'un compact, à l'exception de la métrique euclidienne. Depuis le travail de Witten, de nombreux résultats de ce type ont été obtenus en utilisant cette approche par les spineurs dans différents cadres (voir [MO89], [AD98] ou encore [Her98a]). Un des atouts de cette méthode provient du fait que les espaces sur lesquelles sont modelées les variétés étudiées sont caractérisés par l'existence de champs de spineurs très particuliers. Le lecteur intéressé par ces questions pourra consulter le très complet survey [Her98b].

Récemment de nouveaux résultats de rigidités ont été obtenus dans le cadre des variétés à bord. Plus précisément, une question des plus naturelles pour ce type de variétés est la suivante: si on note $(M, \partial M, g)$ une variété à bord munie d'une métrique riemannienne g, quelle influence la géométrie du bord $(\partial M, g)$ peut-elle avoir sur le comportement de la métrique g à l'intérieur de la variété M? Une première étape pour aborder cette question consiste à restreindre fortement la géométrie du bord et alors de voir ce que

Date: 21 mars 2008.
1991 *Mathematics Subject Classification.* Differential Geometry, Global Analysis, 53C27, 53C40, 53C80, 58G20.
Key words and phrases. Variétés à bord, Opérateurs de Dirac, Conditions à bord, Rigidités.

l'on peut déduire sur la géométrie de la variété toute entière. Un théorème de ce type est obtenu dans [SFT02] et [Mia03] (voir aussi Corollaire 3.4) où les auteurs donnent à l'aide de théorèmes de la masse positive une réponse à cette question dans le cas où le bord est isométrique à la sphère ronde $\mathbb{S}^{n-1}$ (et sous certaines hypothèses sur les courbure à l'intérieur de M). D'autres résultats utilisant ces théorèmes de masse positive sont prouvés en imposant d'autres restrictions sur la géométrie du bord. Une d'entre elles, en rapport avec la notion de masse "quasi-locale" en relativité générale, est de supposer l'existence d'une immersion isométrique du bord $(\partial M, g)$ dans l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, eucl)$ (voir [Mia03] ou bien [HW07]). La plupart de ces énoncés exigent que la variété soit munie d'une structure spinorielle puisque leurs démonstrations reposent sur des théorèmes de la masse positive prouvés à la manière de Witten [Wit81].

D'autres part, de récents travaux de Hijazi, Montiel, Roldán et Zhang (voir [HMZ01], [HMR03] ou encore [HM03]) mettent en évidence le rôle de la géométrie spinorielle extrinsèque en théorie des hypersurfaces. Dans ces travaux, les auteurs relient la première valeur propre de l'opérateur de Dirac du bord et des quantités prenant en compte la géométrie extrinsèque du bord (telles que la courbure moyenne ou bien un invariant de Yamabe intervenant dans le problème de Yamabe sur les variétés à bord [Esc92]). À l'aide de cette estimation et d'une étude détaillée de son cas d'égalité, ils donnent, entre autres, une preuve du théorème d'Alexandrov [Ale56]. D'autres résultats de rigidiés du type de ceux cités dans le paragraphe précédent sont obtenus. Le schéma de démonstration consiste à vérifier que sous certaines hypothèses sur les différentes courbure de la variété, des champs de spineurs très particuliers sur le bord (des spineurs de Killing dans ce cas) proviennent de champs de spineurs parallèles sur la variété toute entière, en restreignant ainsi fortement la géométrie.

Ce travail se place dans la continuité de l'article d'Hijazi et Montiel [HM03]. En effet, on étudie ici le même type de questions en imposant l'existence de champs de spineurs plus généraux sur le bord, des spineurs satisfaisant l'équation de Dirac c'est-à-dire vérifiant:

$$\mathbf{D}\Phi = \frac{n-1}{2}H_0\Phi, \tag{1}$$

où $\mathbf{D}$ est l'opérateur de Dirac du bord (voir Section 2) et H_0 est une fonction positive non identiquement nulle sur ∂M. Le résultat principal de cet article s'énonce de la façon suivante: si (M^n, g) est une variété riemannienne spin compacte à courbure scalaire $R \geq 0$ dont le bord est à courbure moyenne H et possédant un champ de spineurs Φ satisfaisant l'équation (1) avec $H \geq H_0$ alors le champ Φ se prolonge en un spineur parallèle sur toute la variété. À l'aide de ce théorème, on obtient des résultats de rigidités pour des variétés à bord dont le bord $(\partial M, g)$ est à courbure moyenne H et admet une immersion isométrique dans l'espace euclidien à courbure moyenne H_0. On est ainsi en mesure de répondre à une question posée par Schroeder et Strake [SS89] dans le cadre des variétés spinorielles. Une autre application est donnée par une preuve simple d'un théorème de rigidité pour la boule euclidienne. Des résultats analogues sont prouvés dans le cadre hyperbolique.

Remerciements: Je voudrais remercier Oussama Hijazi, Emmanuel Humbert et Julien Roth pour leurs remarques et suggestions, ainsi que pour leurs soutiens. Je suis aussi très reconnaissant envers l'Université de Neuchâtel pour son soutien financier durant la rédaction de ce travail.

2. Préliminaires géométriques

Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle de dimension n. Notons ΣM le fibré des spineurs complexes au dessus de M et soit ∇ les connexions de Levi-Civita riemannienne et spinorielle. La multiplication de Clifford, c'est-à-dire l'action du fibré de Clifford $\mathbb{C}l(M)$ sur le fibré des spineurs, sera notée:

$$\gamma : \mathbb{C}l(M) \longrightarrow \mathrm{End}\,(\Sigma M).$$

Enfin, on notera par $\langle\ ,\ \rangle$ le produit hermitien naturel sur ΣM, compatible avec ∇ et γ. L'opérateur de Dirac est alors défini comme composé de la multiplication de Clifford et de la connexion de Levi-Civita spinorielle, c'est-à-dire $D = \gamma \circ \nabla$. C'est un opérateur différentiel elliptique d'ordre un agissant sur les sections du fibré ΣM, localement donné par:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \gamma(e_i)\nabla_{e_i},$$

où $\{e_1, \cdots, e_n\}$ est un repère local g-orthonormé local de TM.
Supposons à partir de maintenant que M possède un bord lisse ∂M. Puisque ∂M est une hypersurface orientée de M, le fibré normal est trivial et ainsi ∂M hérite naturellement d'une structure spinorielle induite par celle de M. On peut alors constuire le fibré intrinsèque des spineurs que l'on notera $\Sigma(\partial M)$ et on notera respectivement par $\nabla^{\partial M}$, $\gamma^{\partial M}$ et $D^{\partial M}$, la connexion de Levi-Civita, la multiplication de Clifford et l'opérateur de Dirac intrinsèque à ∂M. On peut également définir (voir [Bär98] par exemple) un fibré extrinsèque des spineurs au-dessus de ∂M en posant $\mathbf{S} := \Sigma M_{|\partial M}$. Ce fibré est lui aussi muni d'une connexion de Levi-Civita $\nabla^{\mathbf{S}}$ et d'une multiplication de Clifford $\gamma^{\mathbf{S}}$ qu'on peut relier avec celles définies sur M par:

$$\begin{aligned} \nabla_X &= \nabla^{\mathbf{S}}_X + \frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}\big(A(X)\big) \quad \textit{(formule de Gauss spinorielle)} \qquad (2)\\ \gamma^{\mathbf{S}}(X) &= \gamma(X)\gamma(\nu), \end{aligned}$$

pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial M)\big)$ et où ν est le champ de vecteur normal unitaire rentrant à ∂M et A l'application de Weingarten définie par $A(X) = -\nabla_X \nu$. De la même manière que dans le cadre intrinsèque, on peut définir un opérateur de Dirac agissant sur le fibré $\mathbf{S}$ en posant $\mathbf{D} := \gamma^{\mathbf{S}} \circ \nabla^{\mathbf{S}}$. Cet opérateur sera appelé *l'opérateur de Dirac extrinsèque de* ∂M. Un simple calcul utilisant la formule de Gauss spinorielle (2) permet de vérifier que cet opérateur et l'opérateur de Dirac de la variété M sont reliés par l'identité:

$$\mathbf{D}\psi = \frac{n-1}{2}H\psi - \gamma(\nu)D\psi - \nabla_\nu \psi. \qquad (3)$$

pour tout $\psi \in \Gamma(\mathbf{S})$ et où H est la courbure moyenne (normalisée) de ∂M dans M par rapport au champ normal unitaire sortant.

L'hypersurface ∂M possède donc deux fibrés des spineurs qui s'identifient de façon canonique. En effet, si n est impair, on peut assimiler $(\mathbf{S}, \gamma^{\mathbf{S}}, \nabla^{\mathbf{S}}, \mathbf{D})$ à:

$$\big(\Sigma(\partial M), \gamma^{\partial M}, \nabla^{\partial M}, D^{\partial M}\big) \tag{4}$$

et si n est pair à:

$$\big(\Sigma(\partial M) \oplus \Sigma(\partial M), \gamma^{\partial M} \oplus -\gamma^{\partial M}, \nabla^{\partial M} \oplus \nabla^{\partial M}, D^{\partial M} \oplus -D^{\partial M}\big). \tag{5}$$

Pour plus de détails sur ces identifications, on pourra consulter [Bär98], [HMZ01] ou encore [Mor02]. D'autre part, en utilisant le fait que:

$$\mathbf{D}\gamma(\nu) = -\gamma(\nu)\mathbf{D} \tag{6}$$

on montre facilement que le spectre de l'opérateur de Dirac extrinsèque est symétrique par rapport à zéro. À l'aide de ces identifications, O. Hijazi et S. Montiel [HM03] définissent la notion de spineurs de Killing extrinsèque, généralisant la notion de spineurs de Killing réels au cadre des hypersurfaces. Plus précisément, un champ de spineurs $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$ est appelé champ de spineurs de Killing *extrinsèque* si pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial M)\big)$, on a:

$$\nabla^{\mathbf{S}}_X \varphi = -\alpha \gamma^{\mathbf{S}}(X)\varphi, \tag{7}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Sous diverses hypothèses sur les courbures de la variété, les auteurs montrent que l'existence d'un tel champ sur le bord implique l'existence d'un spineur parallèle sur toute la variété et force le bord à être totalement ombilique à courbure moyenne constante. Dans cet article, on étudie le cas plus général où on considère, non plus un champ de spineurs de Killing extrinsèque, mais ce qu'on pourrait appeler un champ de Killing généralisé extrinsèque (par analogie avec les spineurs de Killing généralisés, voir par exemple [Fri98] ou [FK01]).

Convention: On convient dans cet article que si Σ^{n-1} est une variété compacte qui s'immerge dans deux variétés spinorielles de dimension n, alors ces immersions définissent la même structure spinorielle sur Σ^{n-1}.

3. Domaines à courbure scalaire positive

Dans cette section, on considère (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension n à courbure scalaire $R \geq 0$. On suppose que le bord ∂M de M est non vide et qu'il possède p composantes connexes ∂M_j dont la courbure moyenne $H^{(j)}$ est positive pour tout $1 \leq j \leq p$. Le résultat principal de cette section est alors donné par:

Théorème 1. *Soit (M^n, g) une variété connexe, compacte, riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ et à bord lisse ∂M. Supposons que la courbure scalaire de M satisfait $R \geq 0$ et que la courbure moyenne de chaque composante connexe ∂M_j de ∂M dans M est non identiquement nulle et vérifie $H^{(j)} \geq 0$. S'il existe un champ de spineurs lisse $\Phi \in \Gamma(\mathbf{S}_{j_0})$ satisfaisant:*

$$\mathbf{D}\Phi = \frac{n-1}{2} H_0 \Phi, \tag{8}$$

où H_0 est une fonction lisse sur $\partial M_{|j_0}$ avec $0 \leq H_0 \leq H^{(j_0)}$, alors la variété (M^n, g) possède un champ de spineurs parallèle, le bord est connexe et $H^{(j_0)} = H_0$.

Dans l'énoncé de ce théorème, on a posé $\mathbf{S}_{j_0} := \Sigma M_{|\partial M_{j_0}}$. La démonstration de ce résultat repose en premier lieu sur la formule de Schrödinger-Lichnerowicz [Lic63] qui relie le carré de l'opérateur de Dirac au laplacien spinoriel brut. Plus précisément, on a:

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{R}{4}, \tag{9}$$

ce qui, une fois intégrée sur M, donne (voir [HMZ01]):

$$\int_M \big(|\nabla\psi|^2 - |D\psi|^2 + \frac{1}{4}R|\psi|^2\big)dv = \int_{\partial M} \big(\langle \mathbf{D}\psi, \psi\rangle - \frac{n-1}{2}H|\psi|^2\big)ds \tag{10}$$

pour tout $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$. On fera souvent référence à cette égalité comme étant la formule de Reilly spinorielle par analogie avec la formule de Reilly "classique" (voir [Rei77]). L'autre point important intervenant dans la démonstration du Théorème 1 est un choix judicieux de condition à bord pour l'opérateur de Dirac de M. Pour plus de détails sur ce sujet, on pourra consulter [BBW93] ou bien encore [HMR02]. On considère ici la condition MIT définie par la projection point par point:

$$\begin{array}{rccl} P^\pm : & L^2(\mathbf{S}) & \longrightarrow & L^2(V^\pm) \\ & \varphi & \longmapsto & \frac{1}{2}(Id \pm i\gamma(\nu))\varphi \end{array}$$

où $V^\pm$ est le sous-fibré de $\mathbf{S}$ dont la fibre en un point est donnée par l'espace propre associé à la valeur propre ± 1 de l'involution $i\gamma(\nu)$. On peut alors vérifier que cette condition à bord est elliptique pour l'opérateur de Dirac D de M et qu'on a (voir [HMZ02]):

Lemme 3.1. *Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ à bord lisse ∂M. Si on suppose que $R \geq 0$ et $H \geq 0$, alors l'opérateur*

$$D : \{\varphi \in H_1^2(\Sigma M) \ :\ P^\pm\varphi_{|\partial M} = 0\} \longrightarrow L^2(\Sigma M)$$

est inversible.

On est maintenant en mesure de prouver le résultat principal de cette section.

Preuve du Théorème 1: Soit $\Phi \in \Gamma(\mathbf{S}_{j_0})$ une solution de l'équation de Dirac (8) que l'on prolonge en un champ de spineurs lisse $\widetilde{\Phi}$ sur M tout entier qui s'annule sur toutes les autres composantes connexes de ∂M, c'est-à-dire on a:

$$\widetilde{\Phi}_j := \widetilde{\Phi}_{|\partial M_j} = \begin{cases} \Phi & \text{si } j = j_0 \\ 0 & \text{si } j \neq j_0. \end{cases} \tag{11}$$

Le Lemme 3.1 assure l'existence d'un unique champ de spineurs lisse $\Psi \in \Gamma(\Sigma M)$ satisfaisant le problème à bord:

$$\begin{cases} D\Psi = 0 & \text{sur } M \\ P^\pm\Psi_{|\partial M} = P^\pm\widetilde{\Phi}_{|\partial M} & \text{le long de } \partial M, \end{cases} \tag{12}$$

ce qui, en utilisant (11), s'écrit:

$$\begin{cases} D\Psi = 0 & \text{sur } M \\ P^\pm\Psi_{|\partial M_{j_0}} = P^\pm\Phi & \text{le long de } \partial M_{j_0} \\ P^\pm\Psi_{|\partial M_j} = 0 & \text{le long de } \partial M_j \text{ pour } j \neq j_0. \end{cases} \tag{13}$$

Dans la suite, on notera indifféremment un champ de spineurs sur M et sa restriction au bord si aucune confusion ne peut être faite. En appliquant la formule de Reilly (10) et puisque $R \geq 0$, on obtient:

$$0 \leq \int_M \Big(|\nabla\Psi|^2 + \frac{1}{4}R|\Psi|^2\Big)dv \;=\; \sum_{j=1}^p \int_{\partial M_j} \Big(\langle \mathbf{D}\Psi, \Psi\rangle - \frac{n-1}{2}H^{(j)}|\Psi|^2\Big)ds. \tag{14}$$

Montrons maintenant que le terme de bord de cette quantité est négatif. Pour cela, on remarque tout d'abord que puisque le champ Φ satisfait l'équation (8) sur ∂M_{j_0}, on a en utilisant (6) que:

$$\mathbf{D}(P^{\pm}\Phi) = \frac{n-1}{2}H_0 P^{\mp}\Phi. \tag{15}$$

D'autre part, pour tout champ de spineurs $\varphi \in \Gamma(\mathbf{S})$, une intégration par parties utilisant la symétrie de l'opérateur de Dirac $\mathbf{D}$ et la décomposition $\varphi = P^+\varphi + P^-\varphi$ donnent:

$$\int_{\partial M} \langle \mathbf{D}\varphi, \varphi\rangle ds = 2\int_{\partial M} \mathrm{Re}\langle \mathbf{D}(P^{\pm}\varphi), P^{\mp}\varphi\rangle ds.$$

Donc si on applique cette identité au champ Ψ, on obtient à l'aide de (12) et (15):

$$\int_{\partial M_{j_0}} \langle \mathbf{D}\Psi, \Psi\rangle ds = (n-1)\int_{\partial M_{j_0}} H_0 \,\mathrm{Re}\langle P^{\mp}\Phi, P^{\mp}\Psi\rangle ds. \tag{16}$$

De plus, en développant $|P^{\mp}\Psi - P^{\mp}\Phi|^2 \geq 0$, on a:

$$2\,\mathrm{Re}\langle P^{\mp}\Phi, P^{\mp}\Psi\rangle \leq |P^{\mp}\Psi|^2 + |P^{\mp}\Phi|^2, \tag{17}$$

ce qui permet d'écrire:

$$\int_{\partial M_{j_0}} \langle \mathbf{D}\Psi, \Psi\rangle ds \leq \frac{n-1}{2}\int_{\partial M_{j_0}} H_0\big(|P^{\mp}\Psi|^2 + |P^{\mp}\Phi|^2\big)ds. \tag{18}$$

On remarque aussi que la symétrie de $\mathbf{D}$ et (15) donnent:

$$\int_{\partial M_{j_0}} H_0|P^{\pm}\Phi|^2 ds \;=\; \int_{\partial M_{j_0}} H_0|P^{\mp}\Phi|^2 ds.$$

Ainsi, en utilisant cette relation dans (18) et le fait que $P^{\pm}\Psi = P^{\pm}\Phi$ sur ∂M_{j_0}, on obtient:

$$\int_{\partial M_{j_0}} \langle \mathbf{D}\Psi, \Psi\rangle ds \leq \frac{n-1}{2}\int_{\partial M_{j_0}} H_0|\Psi|^2 ds$$

avec égalité si et seulement si $P^{\mp}\Psi = P^{\mp}\Phi$ sur ∂M_{j_0}. Donc puisque $0 \leq H_0 \leq H^{(j_0)}$, on a:

$$\int_{\partial M_{j_0}} \Big(\langle \mathbf{D}\Psi, \Psi\rangle - \frac{n-1}{2}H^{(j_0)}|\Psi|^2\Big)ds \leq 0. \tag{19}$$

En examinant maintenant les termes de bord de (14) pour $j \neq j_0$, on vérifie à l'aide de (11) que $P^{\pm}\Psi = P^{\pm}\widetilde{\Phi}_j = 0$ et donc:

$$\int_{\partial M_j} \Big(\langle \mathbf{D}\Psi, \Psi\rangle - \frac{n-1}{2}H^{(j)}|\Psi|^2\Big)ds \;=\; -\frac{n-1}{2}\int_{\partial M_j} H^{(j)}|P^{\mp}\Psi|^2 ds$$

ce qui donne:

$$\sum_{j\neq j_0}\int_{\partial M_j}\Big(\langle \mathbf{D}\Psi,\Psi\rangle-\frac{n-1}{2}H^{(j)}|\Psi|^2\Big)ds\leq 0 \tag{20}$$

puisque $H^{(j)}\geq 0$. De plus, on a égalité dans (20) si et seulement si $P^{\mp}\Psi=0$ (car $H^{(j)}$ est une fonction lisse non identiquement nulle sur ∂M_j). En utilisant (17) et (20), on conclut que le terme de bord dans (14) est négatif et donc que l'on est dans le cas d'égalité de l'inégalité de Reilly spinorielle. Le champ de spineurs $\Psi\in\Gamma(\Sigma M)$ satisfait ainsi:

$$\nabla\Psi=0\quad\text{et}\quad \Psi_{|\partial M}=\widetilde{\Phi}_{|\partial M}. \tag{21}$$

Dans ce cas, le bord est connexe. En effet, puisque le champ de spineurs Ψ est parallèle, il est de norme constante (non nulle) sur M (car M est connexe), donc sur chaque composante connexe de ∂M. Or comme $\widetilde{\Phi}_j=0$ pour $j\neq j_0$ et $\Psi_{|\partial M_{j_0}}=\Phi$, la seule possibilité pour que (21) soit vérifié est que le bord soit connexe (sinon la norme de Ψ ne peut être constante). D'autre part, en utilisant la formule de Gauss spinorielle (2) et le fait que Ψ est parallèle, on calcule aisément que $\mathbf{D}\Psi=\frac{n-1}{2}H^{(j_0)}\Psi$ et donc $H^{(j_0)}=H_0$ puisque Ψ satisfait (8) et qu'il ne possède pas de zéro. □

Remarque 1. *Dans le Théorème 1, la seconde forme fondamentale de $(\partial M,g)$ dans (M^n,g) est complètement déterminée par le champ de spineurs $\Phi\in\Gamma(\mathbf{S})$ satisfaisant (8) et plus particulièrement par le tenseur impulsion-énergie T_Φ associé. En effet, on a montré que le spineur Φ est en fait un champ de spineurs de Killing généralisé extrinsèque, c'est-à-dire vérifiant:*

$$\nabla^{\mathbf{S}}_X\Phi=-\frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}\big(A(X)\big)\Phi,$$

pour tout $X\in\Gamma\big(T(\partial M)\big)$. On peut assez facilement calculer qu'alors (voir [Mor02]*):*

$$A(X,Y):=g\big(A(X),Y\big)=2T_\Phi(X,Y),$$

où T_Φ est le tenseur impulsion-énergie associé à Φ défini (en dehors des zéros de Φ) par:

$$T_\Phi(X,Y):=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\langle\gamma(X)\nabla^{\mathbf{S}}_Y\Phi+\gamma(Y)\nabla^{\mathbf{S}}_X\Phi,\frac{\Phi}{|\Phi|^2}\rangle$$

pour tout $X\in\Gamma\big(T(\partial M)\big)$.

Remarque 2. *En dimension* 3*, on peut affiner la conclusion du Théorème 1. En effet, si (M^3,g) est une variété satisfaisant les hypothèses du Théorème 1 alors la Remarque 1 assure l'existence d'un champ de spineurs de Killing généralisé Φ sur $(\partial M,g)$. Par Friedrich* [Fri98]*, le revêtement universel riemannien de $(\partial M,g)$ s'immerge isométriquement dans $(\mathbb{R}^3,g)$ et la seconde forme fondamentale de cette immersion est donnée par $A=2T_\Phi$.*

À l'aide du Théorème 1, on obtient des résultats de rigidité pour les variétés à bord mettant en exergue que le comportement de la métrique au bord influe sur celui de la métrique à l'intérieur de la variété. En effet, le Théorème 1 permet de donner une preuve (partielle) d'une conjecture posée par Schroeder et Strake [SS89] qui s'énonce de la manière suivante:

Conjecture 1. *Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne à courbure de Ricci positive possédant un bord convexe (c'est-à-dire $A \geq 0$). Supposons que la courbure sectionnelle de M s'annule dans un voisinage U de ∂M et que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée:*

(1) ∂M est simplement connexe

(2) la dimension de ∂M est paire et ∂M est strictement convexe en un point $p \in \partial M$.

Alors la variété (M^n, g) est plate.

Dans [HW07], les auteurs prouvent la partie (1) de cette conjecture et en affaiblissent même les hypothèses. En effet, ils remarquent qu'il suffit en fait d'imposer la nullité de la courbure sectionnelle de M sur ∂M et la positivité de la courbure moyenne H pour démontrer ce résultat. En supposant que la variété est spin, ils peuvent encore affaiblir l'hypothèse sur la courbure de Ricci en imposant seulement la positivité de la courbure scalaire cependant il faut alors ré-imposer la convexité de ∂M. L'hypothèse spin est ici purement technique dans le sens où elle intervient car leurs démonstrations utilisent un théorème de la masse positive (voir [SFT02]) prouvé à la manière de Witten [Wit81]. On donne ici une preuve de ce même point de la conjecture 1 sous des hypothèses encore plus faibles. Plus précisément, on a:

Corollaire 3.2. *Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ dont la courbure scalaire satisfait $R \geq 0$ et à bord lisse non vide ∂M. Supposons de plus que chaque composante connexe du bord de M est simplement connexe, que leur courbure moyenne H est positive (non identiquement nulle) et que la courbure sectionnelle de M est nulle sur ∂M. Alors le bord n'a qu'une seule composante connexe et (M^n, g) est plate.*

Preuve: Remarquons tout d'abord que puisque la courbure sectionnelle κ^M de M s'annule identiquement sur ∂M, l'application de Weingarten A satisfait les formules de Gauss et Codazzi:

$$\begin{aligned} (\nabla^{\partial M}_X A)Y &= (\nabla^{\partial M}_Y A)X \\ R^{\partial M}(X, Y)Z &= g\big(A(Y), Z\big)A(X) - g\big(A(X), Z\big)A(Y), \end{aligned}$$

pour tout $X, Y, Z \in \Gamma\big(T(\partial M)\big)$. Comme ∂M est simplement connexe, le théorème fondamental des hypersurfaces (voir [KN69] par exemple) assure l'existence d'une immersion isométrique F de $(\partial M, g)$ dans $(\mathbb{R}^n, eucl)$ dont la seconde forme fondamentale est donnée par A. En utilisant cette immersion, on construit $2^{[n/2]}$ champs de spineurs $\Phi_i \in \Gamma(\mathbf{S})$ satisfaisant:

$$\nabla^{\mathbf{S}}_X \Phi_i = -\frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}\big(A(X)\big)\Phi_i$$

pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial M)\big)$ et qui vérifient donc $\mathbf{D}\Phi_i = \frac{n-1}{2}H\Phi_i$. Ces champs de spineurs sont obtenus par restriction (par F) à $\mathbf{S}$ des $2^{[n/2]}$ champs de spineurs parallèles de $\Sigma\mathbb{R}^n$. Les conditions du Théorème 1 sont satisfaites permettant alors de conclure que le bord est connexe et que chaque champ de spineurs Φ_i provient d'un champ de spineurs parallèles sur M. On a ainsi un nombre maximal de champs de spineurs parallèles et la variété (M^n, g) donc est plate. $\square$

On peut en fait obtenir un résultat plus général qui s'énonce de la manière suivante:

Corollaire 3.3. *Soit (M^n, g_0) une variété riemannienne spinorielle complète de dimension $n \geq 3$ à courbure scalaire positive et soit (Σ^{n-1}, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n-1$. On suppose qu'il existe une immersion isométrique*

$$F_1 : (\Sigma^{n-1}, g) \to (M^n, g_0)$$

à courbure moyenne H_1 telle que $F_1(\Sigma^{n-1})$ borde un domaine compact Ω dans M. Alors si il existe une autre immersion isométrique

$$F_2 : (\Sigma^{n-1}, g) \to (\mathbb{R}^n, eucl)$$

à courbure moyenne $H_2 \geq 0$ (non identiquement nulle) satisfaisant $H_1 \geq H_2$, le domaine (Ω, g_0) est plat.

La preuve de ce résultat est identique à celle du corollaire 3.3 du fait que l'immersion F_2 assure l'existence d'un nombre maximal de champs de spineurs satisfaisant l'équation (8) avec $H_0 = H_2$ et ainsi le Théorème 1 permet de conclure.

Remarque 3. *Si dans l'énoncé du corollaire 3.3 on suppose que F_2 est un plongement isométrique, un argument similaire à celui de Hang et Wang (*[HW07], Proposition 2*) permet de conclure que (Ω, g_0) est isométrique à un domaine de $\mathbb{R}^n$.*

Une autre application du Théorème 1 est donnée par un résultat de rigidité pour la boule unité de l'espace euclidien. Ce résultat a été obtenu par P. Miao [Mia03] comme corollaire d'un théorème de masse positive dans le cadre de variétés asymptotiquement plates où la métrique n'est pas lisse le long d'une hypersurface. On en donne ici une preuve élémentaire. Plus précisement, on montre:

Corollaire 3.4. *Soit (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension $n \geq 3$ à bord lisse ∂M dont la courbure scalaire satisfait $R \geq 0$. Supposons de plus que le bord ∂M de M est isométrique à la sphère standard $\mathbb{S}^{n-1}$ et que sa courbure moyenne vérifie $H \geq 1$. Alors (M^n, g) est isométrique à la boule unité de $\mathbb{R}^n$.*

Preuve: Par hypothèse, le bord ∂M est isométrique à la sphère standard $\mathbb{S}^{n-1}$, le fibré des spineurs $\Sigma(\partial M)$ est donc trivialisable par $2^{[(n-1)/2]}$ spineurs de Killing $\Phi_i \in \Gamma(\mathbf{S})$ (voir [Gut86]), c'est-à-dire satisfaisant:

$$\nabla^{\partial M}_X \Phi_i = -\frac{1}{2}\gamma^{\partial M}(X)\Phi_i,$$

pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial M)\big)$. En utilisant [HM03], on a $2^{[n/2]}$ spineurs de Killing extinsèques (qu'on notera encore par Φ_i) qui satisfont:

$$\nabla^{\mathbf{S}}_X \Phi_i = -\frac{1}{2}\gamma^{\mathbf{S}}(X)\Phi_i,$$

pour tout $X \in \Gamma\big(T(\partial M)\big)$. Un simple calcul permet de vérifier que $\mathbf{D}\Phi_i = \frac{n-1}{2}\Phi_i$ et on peut donc appliquer le Théorème 1 avec $H_0 = 1$. On a ainsi construit une base de ΣM formée de $2^{[n/2]}$ spineurs parallèles. D'autre part, en utilisant la formule de Gauss spinorielle (2), on vérifie que ∂M est totalement ombilique. En résumé, on a montré que M est un domaine compact plat dont le bord est une hypersurface compacte isométrique à la sphère ronde et totalement ombilique, la variété (M^n, g) est donc isométrique à la boule unité de $(\mathbb{R}^n, eucl)$. □

Remarque 4. *On peut vérifier que les hypothèses du Corollaire 3.4 ne remplissent pas les conditions d'applications des résultats obtenus dans* [HM03]. *En effet, dans cet article les auteurs prouvent que si (M^n, g) est une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension n à bord lisse ∂M dont la courbure scalaire de M et la courbure moyenne de ∂M sont positives et tel que le tenseur d'Einstein $Ric - \frac{R}{2}g$ de M est positif dans la direction normale à ∂M, alors chaque champ de spineur de Killing extrinsèque réel est la restriction d'un spineur parallèle sur M au bord ∂M. Or en utilisant la formule de Gauss et le fait que la courbure scalaire de ∂M est celle de la sphère ronde $\mathbb{S}^{n-1}$, on a:*

$$R^{\partial M} = (n-1)(n-2) = R - 2Ric(\nu, \nu) + (n-1)^2 H^2 - |A|^2.$$

De plus dans le Corollaire 3.4, on suppose que $\mathrm{H} \geq 1$*, donc finalement on a:*

$$Ric(\nu, \nu) - \frac{R}{2} \geq \frac{1}{2}\big((n-1) - |A|^2\big)$$

D'autre part, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $(n-1)H^2 \leq |A|^2$, et donc:

$$|A|^2 \geq n - 1,$$

ce qui ne permet pas d'assurer la positivité du tenseur d'Einstein dans la direction de ν et donc d'appliquer le résultat précédemment cité.

Remarque 5. *Il est clair que l'énoncé du Corollaire 3.4 reste valable si on suppose que le bord est isométrique à la sphère $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ de rayon $r > 0$ et que sa courbure moyenne satisfait $H \geq 1/r$. On conclut alors que (M^n, g) est isométrique à la boule euclidienne de rayon r.*

4. Domaines à courbure scalaire minorée par une constante négative

Dans cette partie, on prouve un analogue du Théorème 1 dans le cadre hyperbolique. Le cadre est le suivant: on considère (M^n, g) une variété riemannienne spinorielle compacte de dimension n dont le bord ∂M est lisse et non vide. On suppose de plus que la courbure scalaire de M satisfait $R \geq -n(n-1)$ et que la courbure moyenne H du bord ∂M est positive et non identiquement nulle.
Il est important de remarquer que la démonstration du Théorème 1 repose essentiellement sur deux points importants: la formule de Schrödinger-Lichnerowicz et un choix judicieux de condition à bord pour l'opérateur de Dirac de la variété M. On rappelle donc ici la formule de Schrödinger-Lichnerowicz "hyperbolique" dont on trouvera une preuve dans [MO89], [AD98] ou bien encore [HMR03] et qui est un analogue de (10) dans le cadre hyperbolique:

$$\int_M \big(|P\psi|^2 + \frac{1}{4}\widetilde{R}|\psi|^2 - \frac{n-1}{n}|\widetilde{D}^{\pm}\psi|^2\big)dv = \int_{\partial M} \big(\langle \widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}\psi, \psi\rangle - \frac{n-1}{2}H|\psi|^2\big)ds \qquad (22)$$

où $\widetilde{R} := R + n(n-1)$, $\widetilde{D}^{\pm} := D \mp \frac{n}{2}i$ et $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm} := \mathbf{D} \pm \frac{n-1}{2}i\gamma(\nu)$. L'opérateur P apparaissant dans (22) est l'opérateur de twisteur (ou opérateur de Penrose) localement donné par:

$$P_X\psi := \nabla_X\psi + \frac{1}{n}\gamma(X)D\psi, \tag{23}$$

pour $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ et $X \in \Gamma(TM)$. On dira alors que ψ est un spineur-twisteur si $P\psi = 0$. D'autre part, on peut vérifier que l'opérateur $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ apparaissant dans le terme de bord de (22) est un opérateur différentiel d'ordre un, elliptique et auto-adjoint dont le spectre est constitué d'un suite de réels non bornée. Notons que le choix de la condition à bord passe par une analyse de son comportement par rapport à l'opérateur de Dirac *tordu* $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$. Il s'avère ici que la condition utilisée dans la Section 3 ne possède pas les propriétés adéquates. Pour cette raison, on utilise une autre condition à bord elliptique pour l'opérateur de Dirac D: *la condition associée à un opérateur de chiralité*. Il est à noter que cette condition à bord n'existe pas toujours sur toute variété riemannienne spinorielle puisqu'elle recquiert l'existence d'un opérateur de chiralité, c'est-à-dire une application linéaire:

$$G : \Gamma(\Sigma M) \longrightarrow \Gamma(\Sigma M),$$

satisfaisant:

$$G^2 = Id, \quad \langle G\psi, G\varphi\rangle = \langle \psi, \varphi\rangle \tag{24}$$

$$\nabla_X(G\psi) = G(\nabla_X\psi), \quad \gamma(X)G(\psi) = -G(\gamma(X)\psi), \tag{25}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$ et tout champ de spineurs $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$. L'existence d'un tel opérateur permet alors de définir une involution sur $\mathbf{S}$ par:

$$\gamma(\nu)G : \Gamma(\mathbf{S}) \longrightarrow \Gamma(\mathbf{S}),$$

donnant ainsi une décomposition en sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 du fibré $\mathbf{S}$. La projection orthogonale:

$$B^{\pm} := \frac{1}{2}(Id \pm \gamma(\nu)G)$$

sur le fibré en sous-espaces propres associés à la valeur propre ± 1 définit une condition à bord elliptique pour l'opérateur de Dirac D de M. Pour plus de détails concernant cette condition à bord, on pourra consulter [HMR02] ou [Rau06], par exemple.
On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat principal de cette partie qui, comme dis précédemment, est une version "hyperbolique" du Théorème 1 de la section 3. En effet, on a:

Théorème 2. *Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ à bord lisse ∂M et qui possède un opérateur de chiralité G. Supposons que la courbure scalaire de M satisfait $R \geq -n(n-1)$ et que la courbure moyenne de chaque composante connexe ∂M_j de ∂M dans M vérifie $H^{(j)} \geq 0$ et est non identiquement nulle. Alors s'il existe un champ de spineurs lisse $\Phi \in \Gamma(\mathbf{S}_{j_0})$ satisfaisant:*

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}\Phi = \frac{n-1}{2}H_0\Phi, \tag{26}$$

où H_0 est une fonction lisse sur ∂M non identiquement nulle avec $0 \leq H_0 \leq H^{(j_0)}$, la variété (M^n, g) possède un champ de spineurs de Killing imaginaire, le bord est connexe et $H^{(j_0)} = H_0$.

La démonstration de ce résultat s'effectue de la même manière que celle du Théorème 1 et repose sur un analogue du Lemme 3.1 dans le cadre hyperbolique pour la condition à bord associée à un opérateur de chiralité. En effet, on a:

Lemme 4.1. *Soit (M^n, g) une variété satisfaisant les hypothèses du Théorème 2, alors l'opérateur:*

$$\widetilde{D}^{\pm} : \{\psi \in H_1^2(\Sigma M) \ : \ B^{\pm}\psi_{|\partial M} = 0\} \longrightarrow L^2(\Sigma M)$$

est inversible.

Preuve: Supposons qu'il existe un champ de spineurs $\varphi_0 \in \Gamma(\Sigma M)$ satisfaisant le problème à bord:

$$\begin{cases} \widetilde{D}^{+}\varphi_0 = 0 & \text{sur } M \\ B^{\pm}\varphi_{0\,|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$\begin{cases} D\varphi_0 = \frac{n}{2}i\varphi_0 & \text{sur } M \\ B^{\pm}\varphi_{0\,|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M. \end{cases}$$

En appliquant ce champ de spineurs dans l'inégalité de Reilly (22), on obtient:

$$0 \leq \frac{1}{4}\int_M \widetilde{R}|\varphi_0|^2 dv \leq \int_{\partial M} \big(\langle \widetilde{\mathbf{D}}^{+}\varphi_0, \varphi_0\rangle - \frac{n-1}{2}H|\varphi_0|^2\big)ds$$

et puisque par hypothèse $B^{\pm}\varphi_{0\,|\partial M} = 0$ et $H \geq 0$, on vérifie facilement que l'on a en fait égalité. Ainsi le champ de spineurs φ_0 satisfait:

$$\begin{cases} \nabla_X\varphi_0 = -(i/2)\gamma(X)\varphi_0 & \text{sur } M \\ B^{\pm}\varphi_{0\,|\partial M} = 0 & \text{le long de } \partial M \end{cases}$$

pour tout $X \in \Gamma(TM)$. D'autre part, la formule de Green donne pour tout $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$:

$$\int_M \langle D\psi, \psi\rangle dv - \int_M \langle \psi, D\psi\rangle dv = -\int_{\partial M} \langle \gamma(\nu)\psi, \psi\rangle ds \tag{27}$$

et donc par sesquilinéarité du produit hermitien sur ΣM, on obtient pour $\psi = \varphi_0$:

$$\int_M |\varphi_0|^2 dv = 0,$$

et donc $\varphi_0 \equiv 0$. Ceci n'est pas possible car φ_0 étant un spineur de Killing imaginaire, il est non trivial. Pour conclure, il suffit alors de remarquer qu'en utilisant (27), on a:

$$(\widetilde{D}^{+})^{*} = \widetilde{D}^{-} \implies \mathrm{CoKer}\,(\widetilde{D}^{+}) \simeq \mathrm{Ker}\,(\widetilde{D}^{-}) = \{0\},$$

et on a ainsi le résultat énoncé. □

On étudie maintenant le comportement de l'opérateur de Dirac "tordu" $\widetilde{\mathbf{D}}^{+}$ par rapport aux projections définissant la condition associée à un opérateur de chiralité. Plus précisément, on prouve:

Lemme 4.2. *Si $\Phi \in \Gamma(\mathbf{S})$ est un champ de spineurs satisfaisant l'équation (26), les propriétés suivantes sont satisfaites:*

(1) $\widetilde{\mathbf{D}}^+(B^\pm\Phi) = \frac{n-1}{2}H_0 B^\mp\Phi$

(2) $\int_{\partial M} H_0|B^\pm\Phi|^2 ds = \int_{\partial M} H_0|B^\mp\Phi|^2 ds$

Preuve: Pour (1), il suffit de remarquer que:

$$\widetilde{\mathbf{D}}^+(B^\pm\psi) = B^\mp(\widetilde{\mathbf{D}}^+\psi),$$

et puisque Φ satisfait (26), une identification des composantes du champ de spineurs par rapport à la décomposition associée aux projections $B^\pm$ donne directement le résultat. Le point (2) découle de (1) et de la symétrie de l'opérateur $\widetilde{\mathbf{D}}^+$. □

La démonstration du Théorème 2 s'effectue alors de la même manière que celle du Théorème 1. On ne la donne pas en détails ici puisque les Lemmes 4.1 et 4.2 montrent que la condition à bord associée à un opérateur de chiralité se comporte de la même manière que la condition MIT par rapport à l'opérateur de Dirac du bord $\mathbf{D}$.

Comme applications du Théorème 2, on obtient des résultats de rigidité pour les variétés à bord dont la courbure scalaire est minorée par une constante négative. En effet, on a par exemple:

Corollaire 4.3. *Soit (M^n, g_0) une variété riemannienne spinorielle de dimension n qui possède un opérateur de chiralité et à courbure scalaire $R \geq -n(n-1)$. Soit (Σ^{n-1}, g) une variété riemannienne compacte de dimension $n-1$ telle qu'il existe une immersion isométrique*

$$F_1 : (\Sigma^{n-1}, g) \to (M^n, g_0)$$

à courbure moyenne H_1 et telle que $F_1(\Sigma^{n-1})$ borde un domaine compact Ω dans M. Supposons qu'il existe une autre immersion isométrique de (Σ^{n-1}, g) dans l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^n, g_{st})$ notée

$$F_2 : (\Sigma^{n-1}, g) \to (\mathbb{H}^n, g_{st})$$

à courbure moyenne $H_2 \geq 0$ non identiquement nulle satisfaisant $H_1 \geq H_2$. Alors le domaine (Ω, g_0) est hyperbolique.

Preuve: Il suffit de remarquer que l'immersion isométrique F_2 de (Σ^{n-1}, g) dans $(\mathbb{H}^n, g_{st})$ assure l'existence d'un nombre maximal de champs de spineurs de $\mathbf{S}$ satisfaisant l'équation (26). Ainsi l'hypothèse sur les courbures moyennes H_1 et H_2 permet d'appliquer le Théorème 2 et de conclure qu'on a un nombre maximal de spineurs de Killing imaginaires. Par [Bau89a] et [Bau89b], (Ω, g_0) est hyperbolique. □

De ce corollaire, on obtient alors directement un énoncé analogue à celui de la conjecture de Schroeder et Strake dans le cadre hyperbolique.

Corollaire 4.4. *Soit (M^n, g) une variété compacte riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ dont la courbure scalaire satisfait $R \geq -n(n-1)$ et à bord lisse non vide.*

Supposons de plus que M possède un opérateur de chiralité, que chaque composante connexe du bord est simplement connexe et à courbure moyenne H positive et que la courbure sectionnelle de M est constante égale à -1 sur ∂M. Alors le bord n'a qu'une seule composante connexe et (M^n, g) est hyperbolique.

Preuve: Puique ∂M est simplement connexe et que la courbure sectionnelle κ^M de M vaut -1 sur ∂M, le théorème fondamental des hypersurfaces assure l'existence d'une immersion isométrique de $(\partial M, g)$ dans $(\mathbb{H}^n, g_{st})$. Le corollaire 4.3 permet de conclure. $\square$

Remarque 6. *Tous les résultats de cette section s'appliquent pour les variétés de dimension paire. En effet, dans ce cas, un opérateur de chiralité est donné par l'élément de volume du fibré des spineurs ΣM.*

Remarque 7. *Il est clair que le Théorème 2 permet aussi d'obtenir un résultat de rigidité pour la boule standard de $\mathbb{H}^n$ mais son énoncé ne serait pas satisfaisant puisque qu'il nécessite l'existence d'un opérateur de chiralité. Cependant, il est à noter que l'on peut directement obtenir un tel résultat comme corollaire d'une estimation de la première valeur propre de l'opérateur de Dirac du bord $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ obtenu par Hijazi, Montiel et Roldán dans* [HMR03]. *En effet, si (M^n, g) est une variété riemannienne spinorielle compacte à bord lisse ∂M telle que la courbure scalaire de M satisfait $R \geq -n(n-1)$ et la courbure moyenne H de ∂M dans M est positive alors:*

$$\lambda_1^{\pm} \geq \frac{n-1}{2} \inf_{\partial M} H \tag{28}$$

où $\lambda_1^{\pm}$ désigne la plus petite valeur propre positive de $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$. De plus, on a égalité si et seulement si les champ de spineurs propres associés à $\lambda_1^{\pm}$ proviennent de la restriction à ∂M de champs de spineurs de Killing imaginaires sur M. À l'aide de ce résultat, on peut prouver l'énoncé suivant:

"Soit (M^n, g) un domaine compact d'une variété complète riemannienne spinorielle de dimension $n \geq 3$ dont la courbure scalaire satisfait $R \geq -n(n-1)$. Supposons de plus que le bord ∂M est isométrique à la sphère ronde $\mathbb{S}^{n-1}\big(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}\big)$, $\alpha > 1$, et que sa courbure moyenne vérifie $H \geq \alpha$. Alors (M^n, g) est isométrique à la boule standard de $\mathbb{H}^n$ dont le bord est la sphère totalement ombilique de rayon $\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}}$."

En effet, il suffit de remarquer qu'à partir d'un champ de spineurs de Killing réel sur le bord (qui existe puisque le bord est isométrique à la sphère ronde), on peut construire un champ de spineurs propre pour l'opérateur de Dirac $\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}$ associé à la valeur propre $\frac{n-1}{2}\alpha$. En effet, si Ψ est un champ de spineurs de Killing de nombre de Killing $\frac{1}{2\sqrt{\alpha^2-1}}$ alors le champ:

$$\Psi^{\pm} := \Psi \pm (\alpha - \sqrt{\alpha^2-1}) i\gamma(\nu)\Psi,$$

satisfait:

$$\widetilde{\mathbf{D}}^{\pm}\Psi^{\pm} = \frac{n-1}{2}\alpha\Psi^{\pm}. \tag{29}$$

Ainsi l'hypothèse $H \geq \alpha$ permet de conclure que l'on a égalité dans (28) et donc que le champ $\Psi^{\pm}$ provient d'un spineur de Killing imaginaire sur M. Puisque la bord ∂M possède un nombre maximal de spineurs de Killing réels, on vérifie aisément que M possède un nombre maximal de spineurs de Killing imaginaires et donc [Bau89a] *et* [Bau89b] *permettent de conclure.*

References

[AD98] L. Anderson and M. Dahl, *Scalar curvature rigidity for asymptotically locally hyperbolic manifolds*, Ann. Global. Anal. Geo. **16** (1998), 1–27.

[Ale56] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for the surfaces in the large I*, Vesnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5–17.

[Bär98] C. Bär, *Extrinsic bounds for eigenvalues of the Dirac operator*, Ann. Glob. Anal. Geom. (1998).

[Bau89a] H. Baum, *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 205–226.

[Bau89b] ———, *Odd-dimensional Riemannian manifolds admitting imaginary Killing spinors*, Ann. Glob. Anal. Geom. **7** (1989), 141–153.

[BBW93] B. Booss-Bavnek and K.P. Wojciechowski, *Elliptic boundary problems for the Dirac operator*, Birkhäuser, Basel, 1993.

[Esc92] J. F. Escobar, *Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary*, Ann. of Math. **136** (1992), 1–50, Addendum in **139** (1994), 749-750.

[FK01] T. Friedrich and E.-C. Kim, *Some remarks on the Hijazi inequality and generalizations of the Killing equation for spinors*, J. Geom. Phys. **37** (2001), 1–14.

[Fri98] T. Friedrich, *On the spinor representation of surfaces in Euclidean* 3*-space*, J. Geom. Phys. **28** (1998), 147–153.

[Gut86] S. Gutt, *Killing spinors on spheres and projective spaces*, Spinors in Physics and Geometry, Proc. Conf. Trieste (1986), 238–248.

[Her98a] M. Herzlich, *Scalar curvature and rigidity of odd-dimensional complex hyperbolic spaces*, Math. Ann. **312** (1998), 641–657.

[Her98b] ———, *Théorèmes de masse positive*, Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie (Institut Fourier, Grenoble) **16** (1998), 107–126.

[HM03] O. Hijazi and S. Montiel, *Extrinsic Killing spinors*, Math. Zeit. **244** (2003), 337–347.

[HMR02] O. Hijazi, S. Montiel, and S. Roldán, *Eigenvalue boundary problems for the Dirac operator*, Comm. Math. Phys. **231** (2002), 375–390.

[HMR03] O. Hijazi, S. Montiel, and A. Roldán, *Dirac operator on hypersurfaces in negatively curved manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **23** (2003), 247–264.

[HMZ01] O. Hijazi, S. Montiel, and X. Zhang, *Dirac operator on embedded hypersurfaces*, Math. Res. Lett. **8** (2001), 195–208.

[HMZ02] ———, *Conformal lower bounds for the Dirac operator of embedded hypersurfaces*, Asian J. Math. **6** (2002), 23–36.

[HW07] Fengbo Hang and Xiaodong Wang, *Vanishing sectional curvature on the boundary and a conjecture of Schroeder and Strake*, Paci. Journ. of Math. **232** (2007), no. 2, 283–288.

[KN69] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Vol. II*, Interscience, New York, 1969.

[Lic63] A. Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9, Série A-B.

[Mia03] P. Miao, *Positive mass theorem on manifolds admitting corners along a hypersurface*, Adv. Theor. Math. Phys. **6** (2003), 1163–1182.

[MO89] M. Min-Oo, *Scalar curvature rigidity of asymptotically hyperbolic spin manifolds*, Math. Ann. **285** (1989), 527–539.

[Mor02] B. Morel, *Tenseur d'impulsion-énergie et géométrie spinorielle extrinsèque*, Thèse, Université Henri Poincaré, Nancy I (2002).

[Rau06] S. Raulot, *Aspect conforme de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord*, Ph.D. thesis, Université Henri Poincaré, Nancy I, 2006.

[Rei77] R.C. Reilly, *Application of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indian Univ. Math. J. **26** (1977), 459–472.

[SFT02] Yuguang Shi and Luen Fai-Tam, *Positive mass theorem and the boundary behaviour of compact manifolds with nonnegative scalar curvature*, Jour. Diff. Geo. **62** (2002), no. 1, 79–125.

[SS89] V. Schroeder and M. Strake, *Rigidity of convex domains in manifolds with nonnegative ricci and sectional curvature*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 173–186.

[Wit81] E. Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.

Institut de Mathématiques, Université de Neuchâtel, Rue Emile-Argand 11, 2007 Neuchâtel, Suisse

E-mail address: simon.raulot@unine.ch